SENTIDO ESPACIAL II

SESIONES DEL PLAN DE COOPERACIÓN TERRITORIAL PARA EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN ARAGÓN

6 de octubre de 2025

Pablo Beltrán-Pellicer

pbeltran@unizar.es

@pbeltranp

https://tierradenumeros.com

Universidad Zaragoza
1542

¿Qué vamos a hacer?

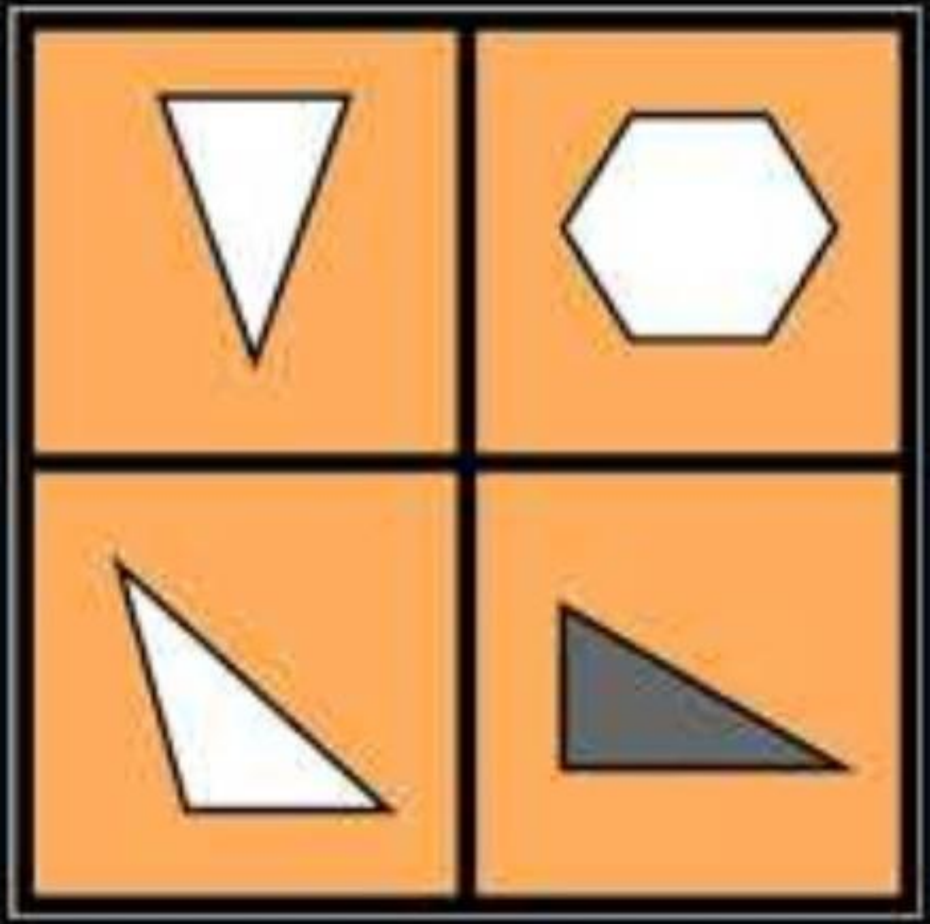
- EL SENTIDO ESPACIAL EN EL CURRÍCULO
- WODB Y QUIÉN ES QUIÉN (POLÍGRAFOS)
- MEDIDA DE ÁREAS
- TEOREMA DE PITÁGORAS DESDE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
- MEDIDA DE ÁNGULOS Y CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS
- ORIGAMI COMO RECURSO
- PENSAMIENTO COMPUTACIONAL Y SENTIDO ESPACIAL: BLOCKSCAD
- SENTIDO ALGEBRAICO Y SENTIDO ESPACIAL: ABEJITAS VOLANDO
- ALGUNOS MATERIALES MÁS (POLYDRON, GEOTIRAS, ETC.)

Which One Doesn't Belong?

https://talkingmathwithkids.com/wodb

9	16
25	43

https://talkingmathwithkids.com/wodb



¿Quién es quién?

Polígrafos

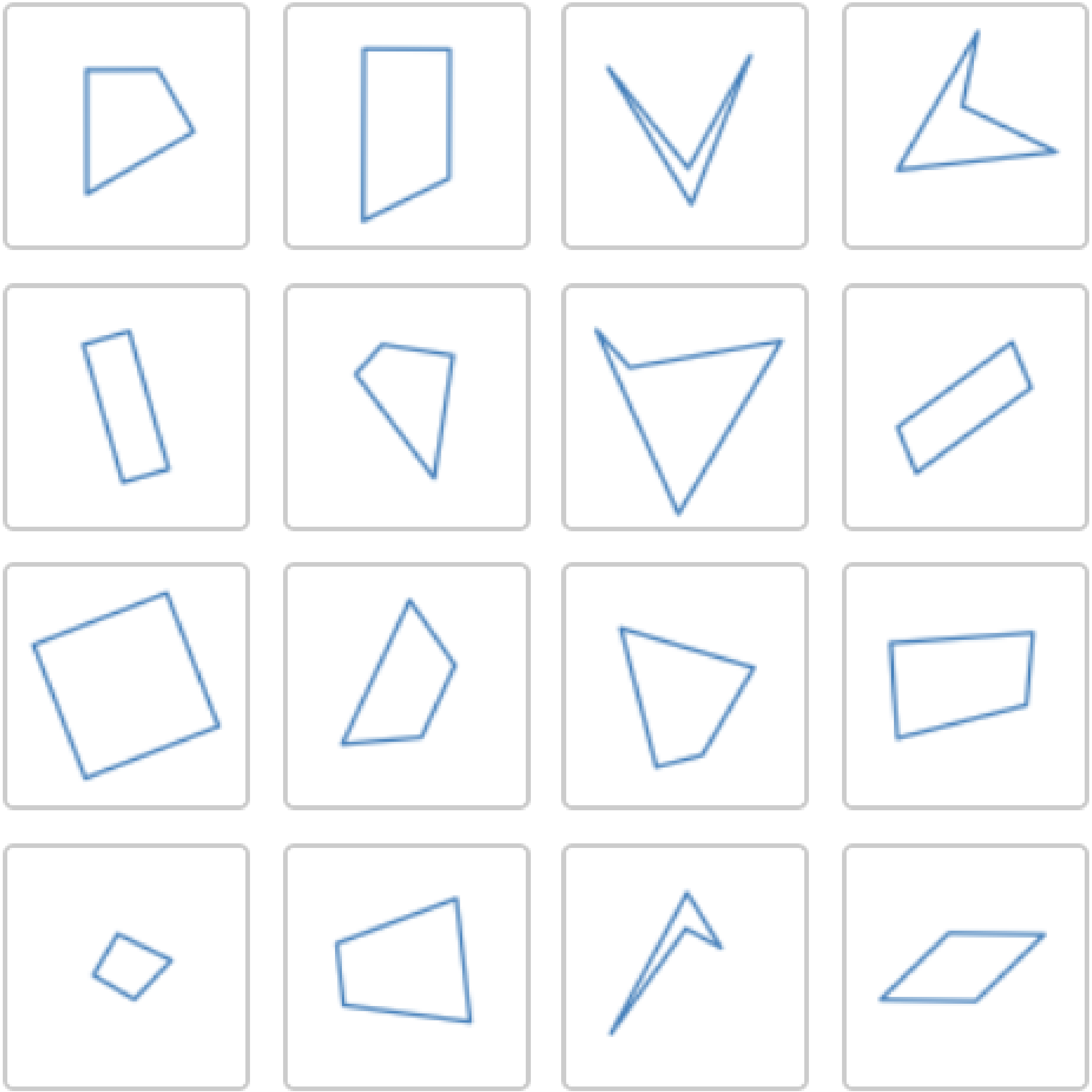
¡Hola, Estudiantes!

Vayan a student.amplify.com/join y escriban:

JU **D8** **K4**

https://student.amplify.com/join/JUD8K4?lang=es

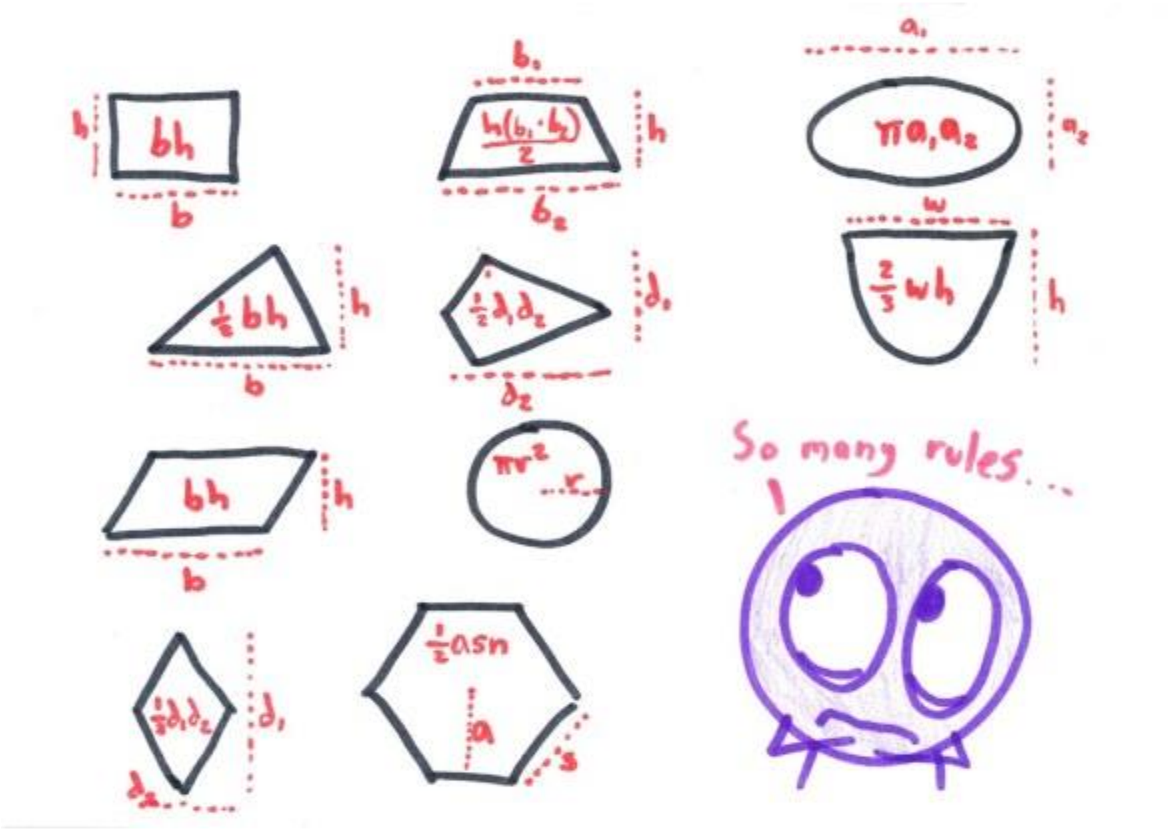
Juego “avanzado”

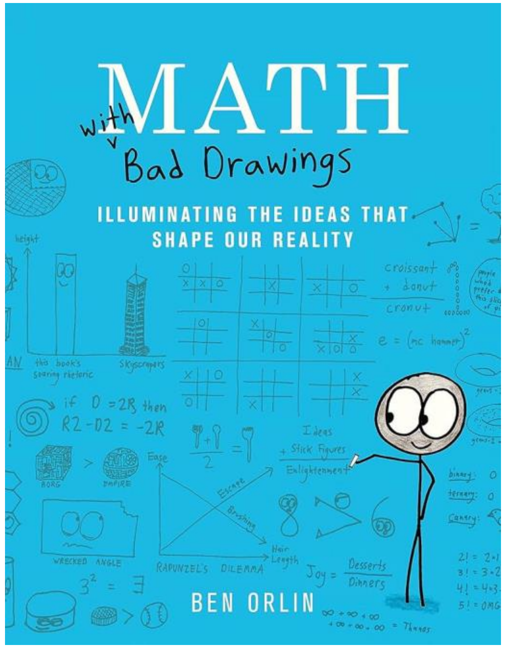



NYPD
MEDIDA
GEOMETRÍA
Sentido de la medida y sentido espacial
imgflip.com

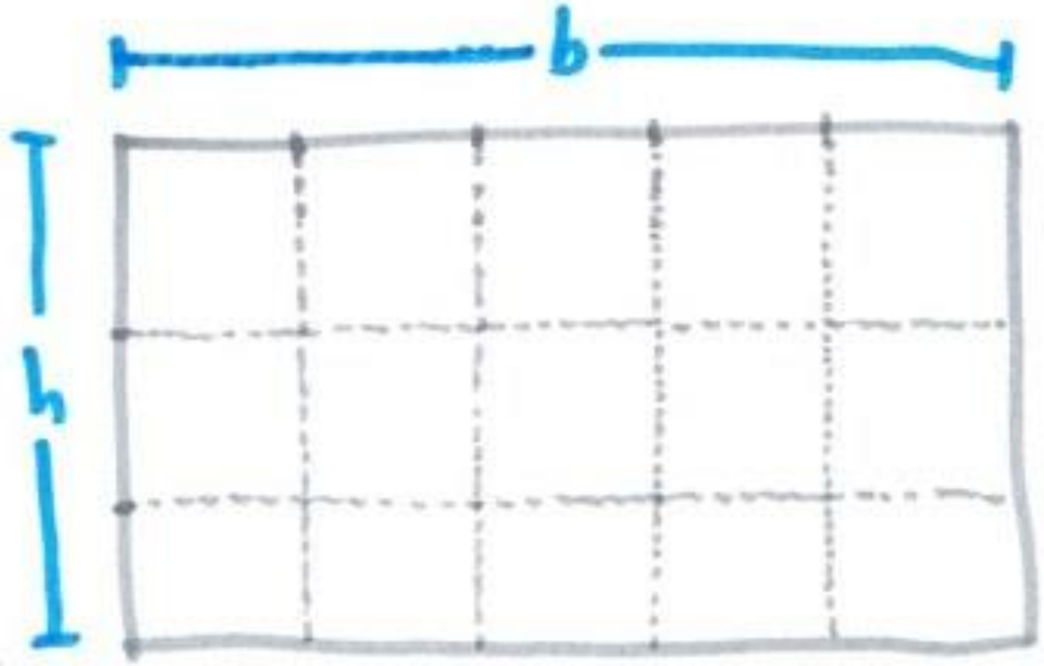
The Secret to All Areas

(Except Area 51, which I Am Not Authorized to Divulge)

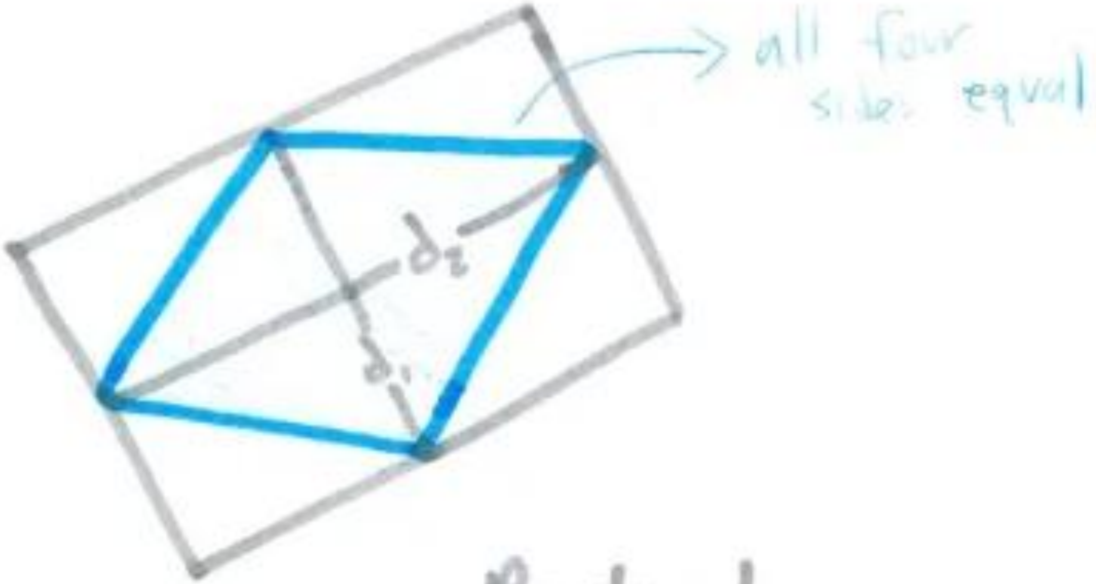




https://mathwithbaddrawings.com/2015/03/11/the-secret-to-all-areas/

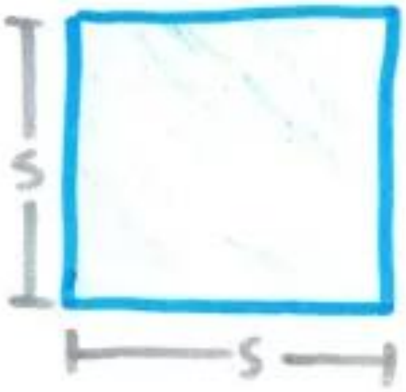


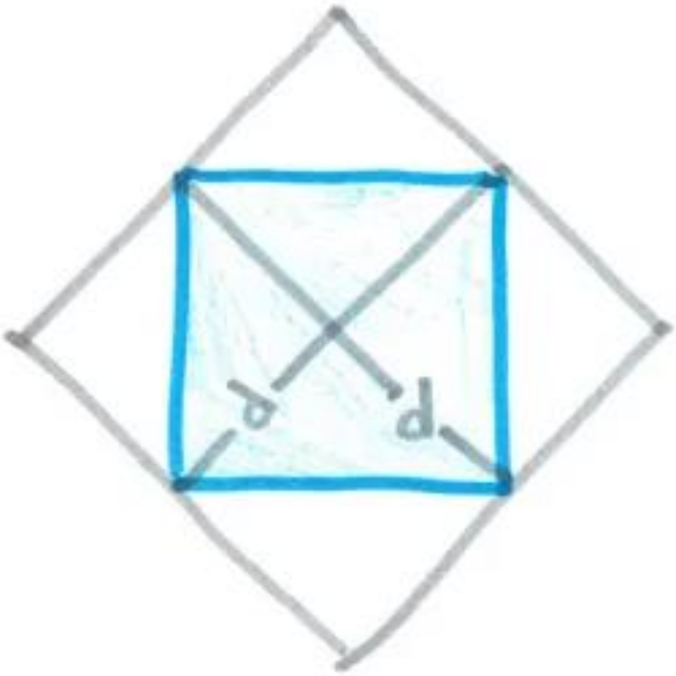
$$A = bh$$



Rectangle Area $= d_1 d_2$

Rhombus Area $= \dfrac{d_1 d_2}{2}$



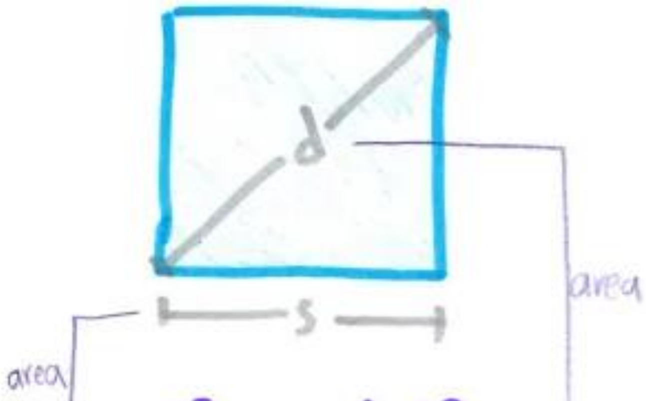


Area $= s^2$

Area $= \frac{1}{2} d^2$

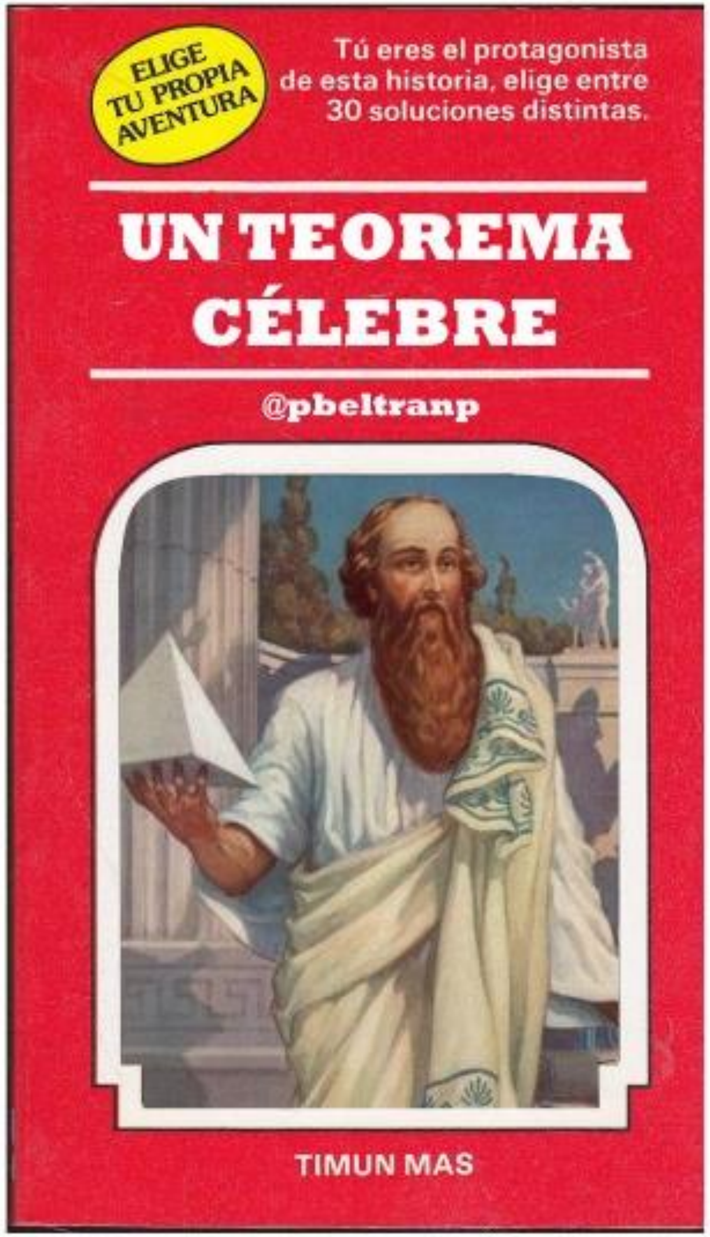
Combining these two formulas, we even get a cool result:

Proof: d is $\sqrt{2}$ times longer than s.

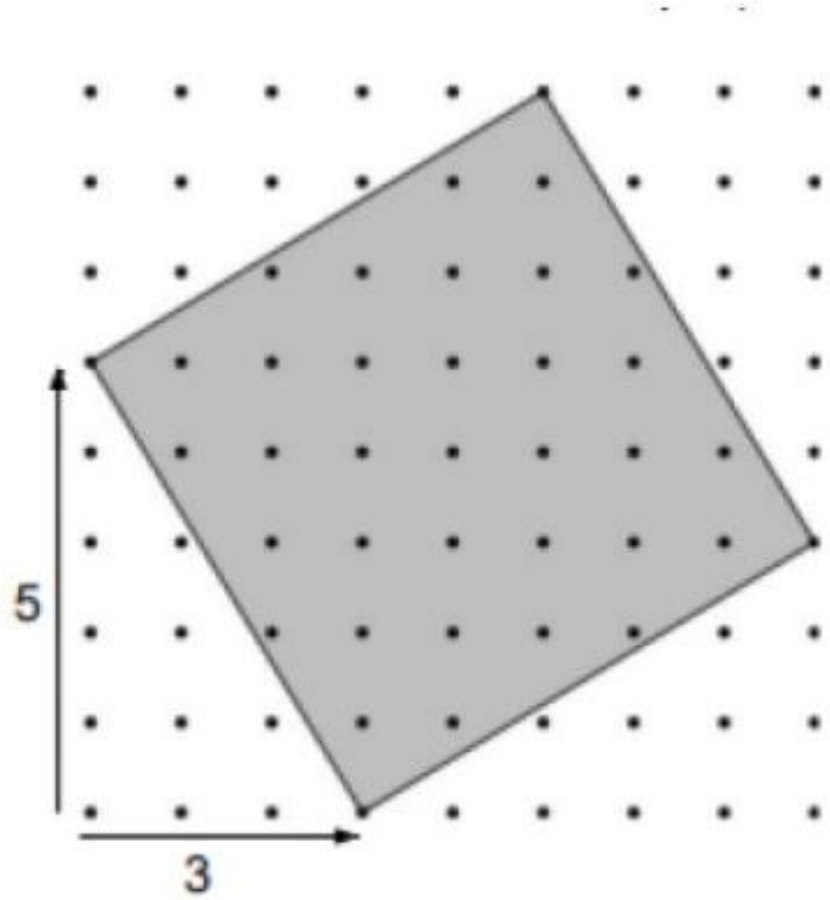


$$s^2 = \frac{1}{2}d^2$$
$$2s^2 = d^2$$
$$\sqrt{2}s = d$$

(And you don't need to phone Pythagoras for help with the proof.)



ELIGE TU PROPIA AVENTURA
Tú eres el protagonista de esta historia, elige entre 30 soluciones distintas.
UN TEOREMA CÉLEBRE
@pbeltranp
TIMUN MAS



5
3

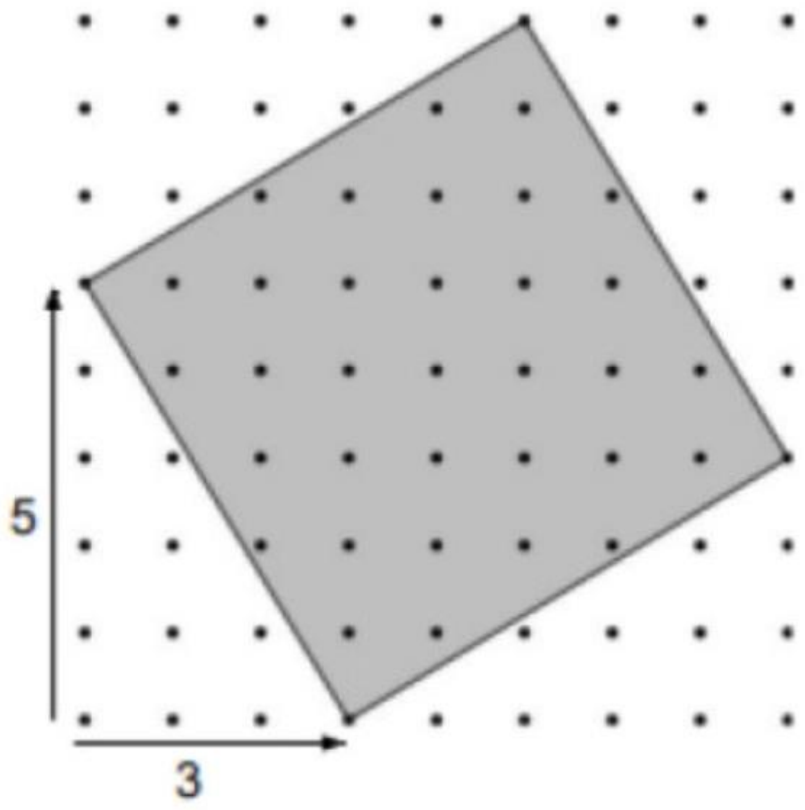
¿Qué es *ver* el currículo?

Toca ponerse con «el teorema de Pitágoras», digamos en 2º ESO (13-14 años).

Dos opciones:

a) $a^2+b^2=c^2$

b) Calcula el área de este cuadrado.



https://www.researchgate.net/publication/358738277_El_teorema_de_Pitagoras_a_traves_de_la_resolucion_de_problemas

olimpiada
Matemática
aragonesa
XXXI

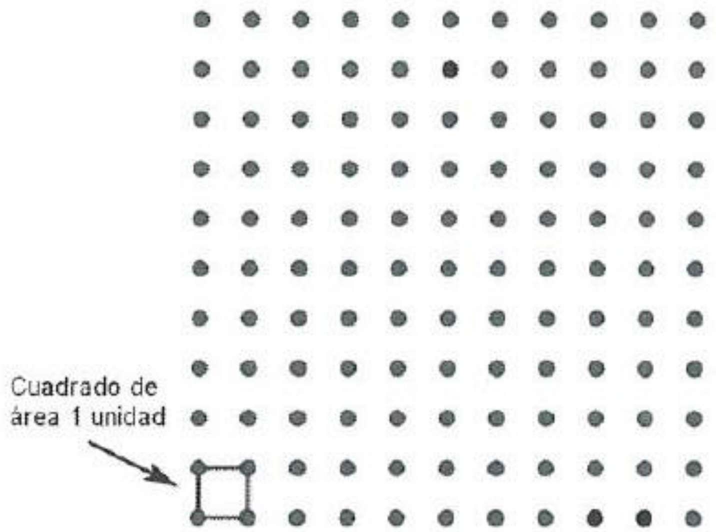
Fase semifinal

19 de abril de 2023

Problema 6 *Cuadrado en trama cuadrada*

Si es posible, dibuja un cuadrado de área igual a 20 unidades en la siguiente trama cuadrada, de tal manera que los vértices del cuadrado caigan en puntos de dicha trama.

Justifica tu respuesta, tanto si es posible como si no.



Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas

Respuesta razonada

- No creo que sea posible porque el area de un cuadrado es $x^2 = area$ y si el area es igual a 20 la ecuación $x^2 = 20$ da ún- resultado con decimales. ej $x^2 + 0 = 20$

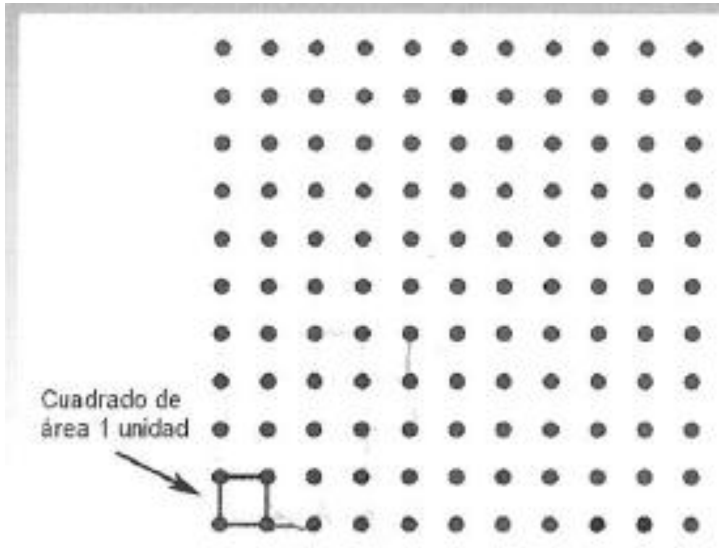
$$\frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1}$$

$$\frac{-0 \pm \sqrt{24}}{2}$$

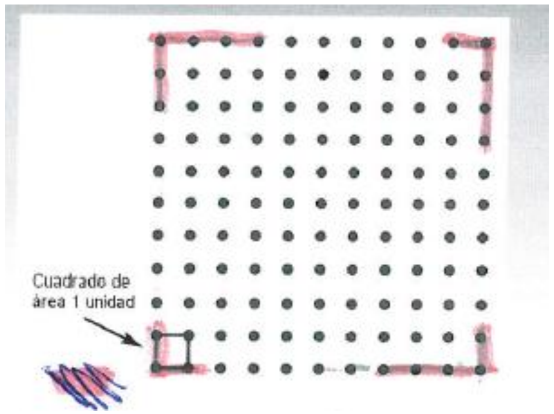
$$\frac{-0 \pm 4,899}{2}$$

$S^1 = 2,45$

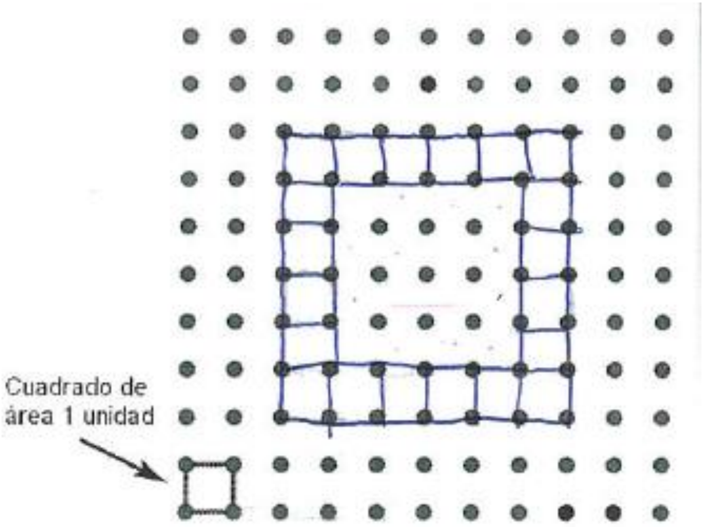
$S^2 = -2,45$



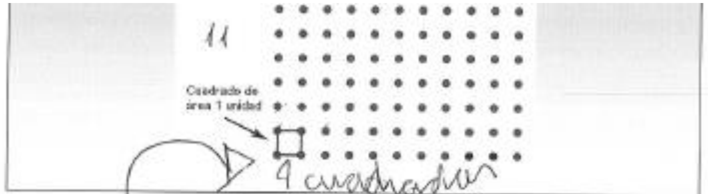
y con los términos explicados en el texto de arriba sería imposible



Tecnicamente es un cuadrado no unido.

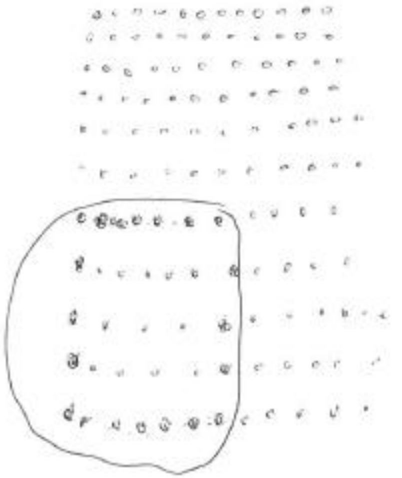


He formado un cuadrado sin rellenar que está formado por el borde 20 cuadrados



Respuesta razonada

121



daría 21

1 = 4 → una unidad
2 = 8
3 = 16
4 = 32
5 = 64
6 = 128
7 = 256
8 = 512
9 = 1024
10 = 2048
11 = 4096
12 = 8192
13 = 16,384
14 = 32,768
15 = 65,536
16 = 131072
17 = 262144
18 = 524288
19 = 1.048.576
20 = 2.097.152

No es posible porque el número 11 es impar y el 10 es impar, o al menos lo que e entendido yo si una unidad son 4 cuadrados como en la imagen, 20 unidades sería unos de 2 millones de circulitos, nose

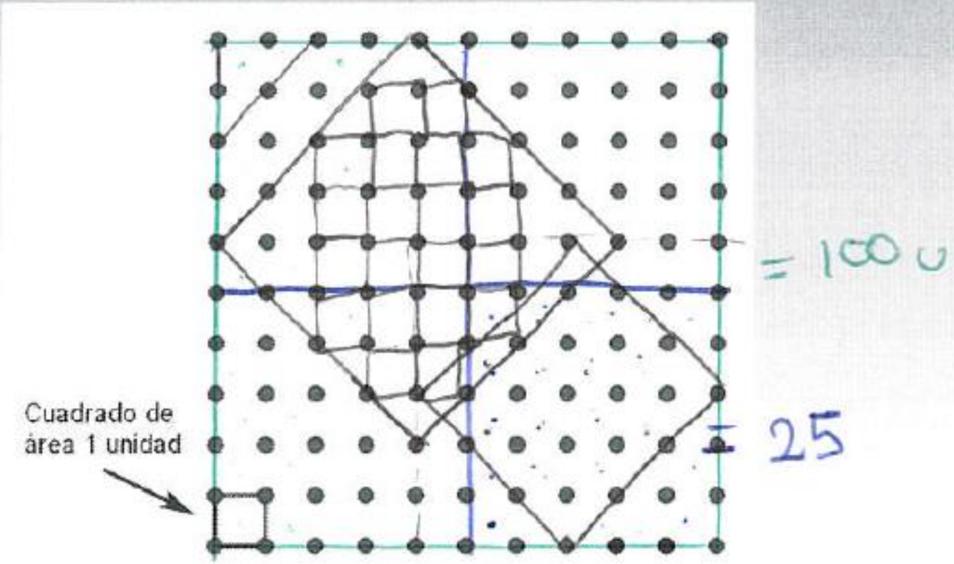
20 unidades

olimpiada
Matemática
aragonesa
XXXI
Fase semifinal
19 de abril de 2025

Problema 6 *Cuadrado en trama cuadrada*

Si es posible, dibuja un cuadrado de área igual a 20 unidades en la siguiente trama cuadrada, de tal manera que los vértices del cuadrado caigan en puntos de dicha trama.

Justifica tu respuesta, tanto si es posible como si no.



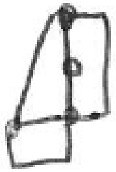
Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas

Lo siento, soy alumna de un curso menos. No lo he dado en clase.

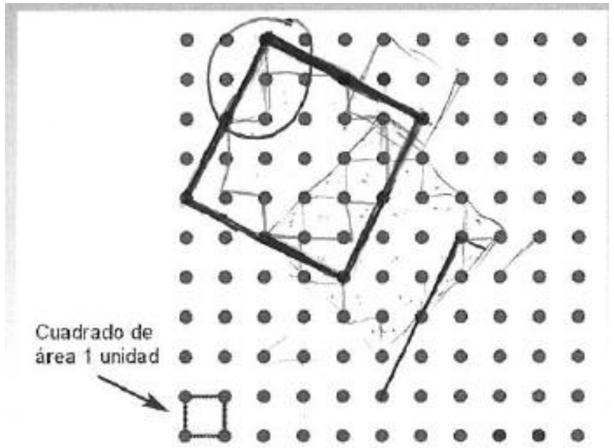
Respuesta razonada

Solución: No, no es posible ya que la raiz cuadrada de 20 da un nº decimal

Sí, porque en la zona rodeada se puede realizar el teorema de pitágoras lo que nos da que la longitud de la



$$a^2+b^2=c^2$$
$$1^2+2^2=c^2$$
$$1+4=c^2$$
$$5=c^2$$
$$\sqrt{5}=c$$

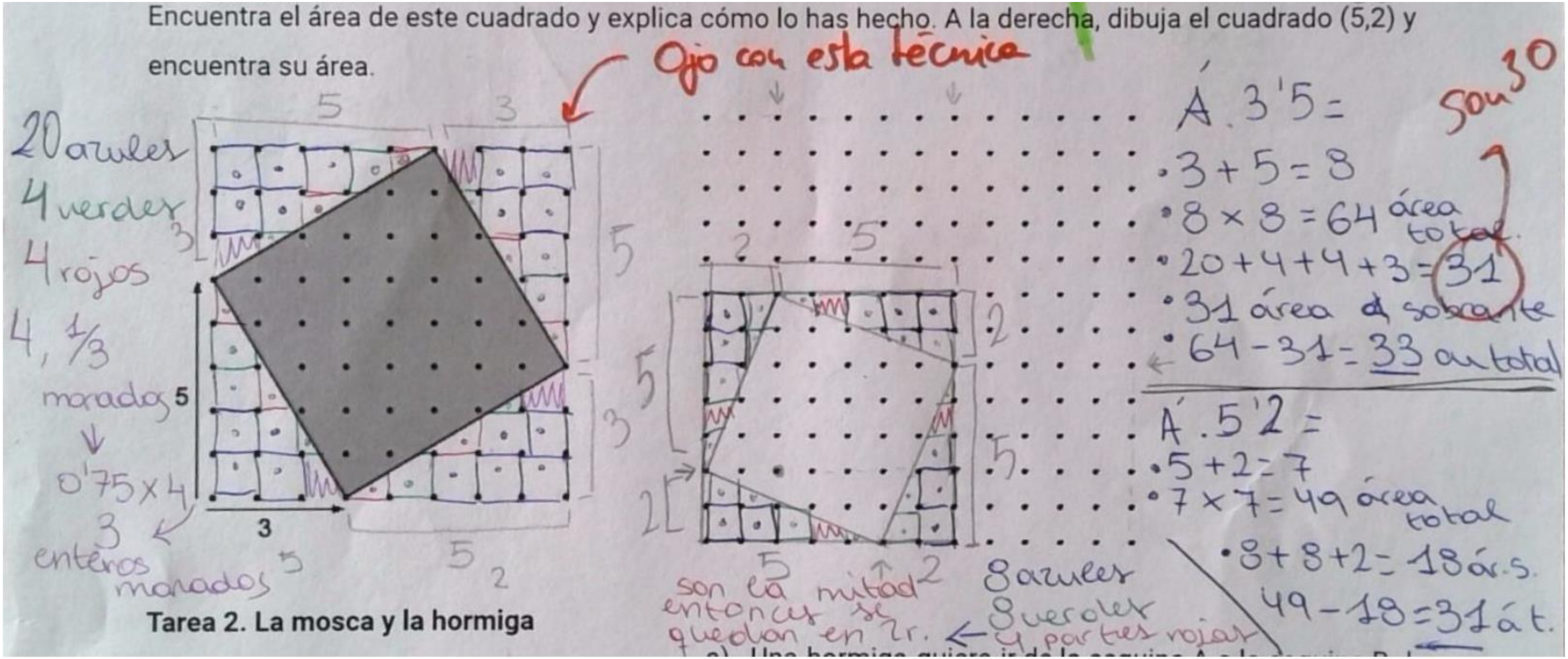


hipotenusa es de $\sqrt{5}$ y como esa longitud es la mitad del lado se añade otra vez $\sqrt{5}$ lo que nos da que un lado es $2\sqrt{5}$

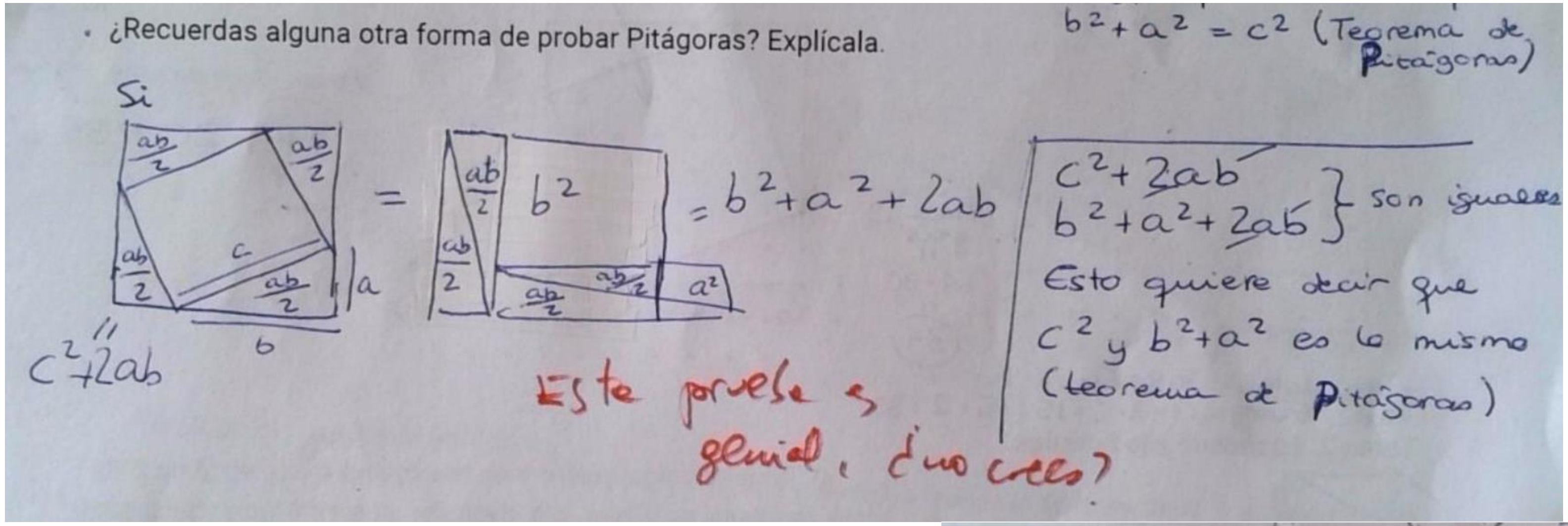
Y como el área de un cuadrado es lado por lado se puede multipica $2\sqrt{5}$ lo que nos da $2\sqrt{5}^2$ y tras resolver nos da

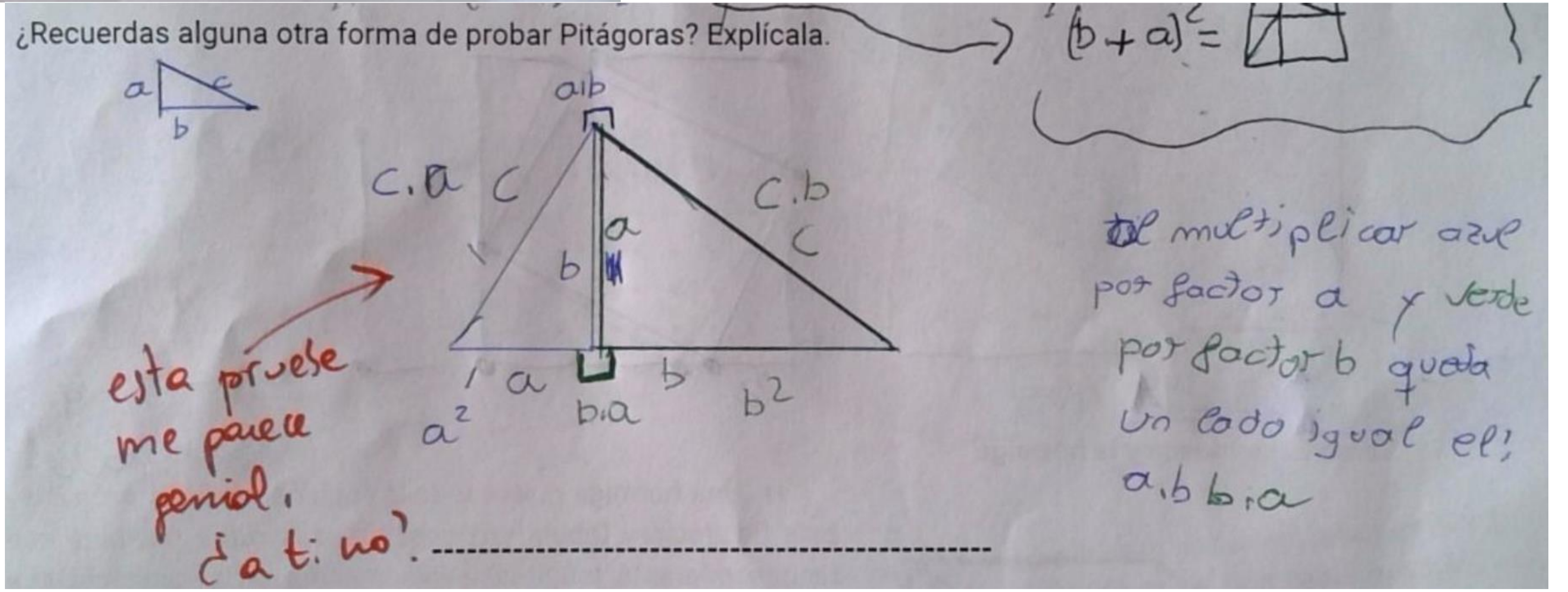
$(2\sqrt{5})^2 = 4\cdot 5 = 20.$

Otro ejemplo (autoevaluación)



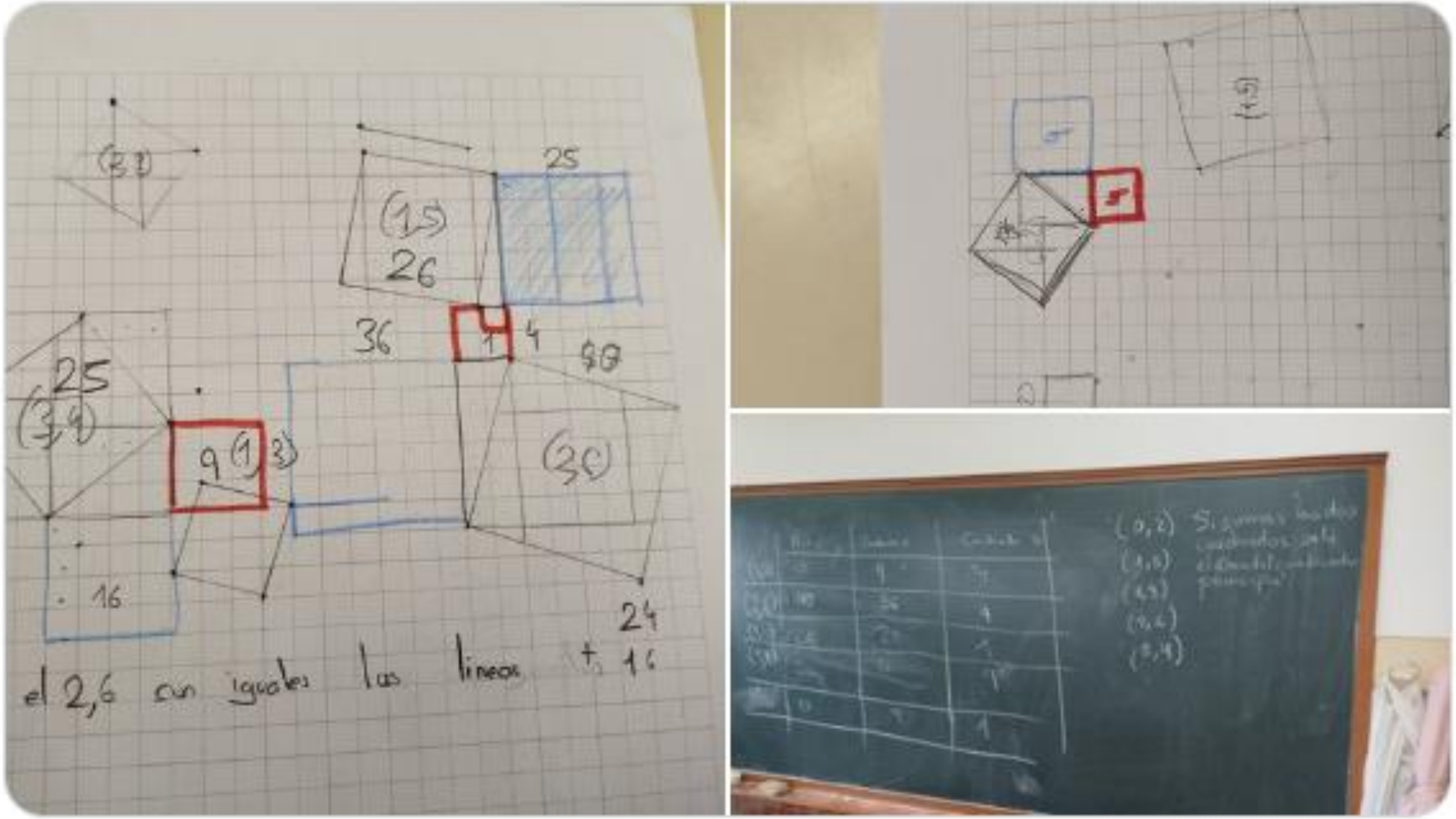
Otro ejemplo (autoevaluación)



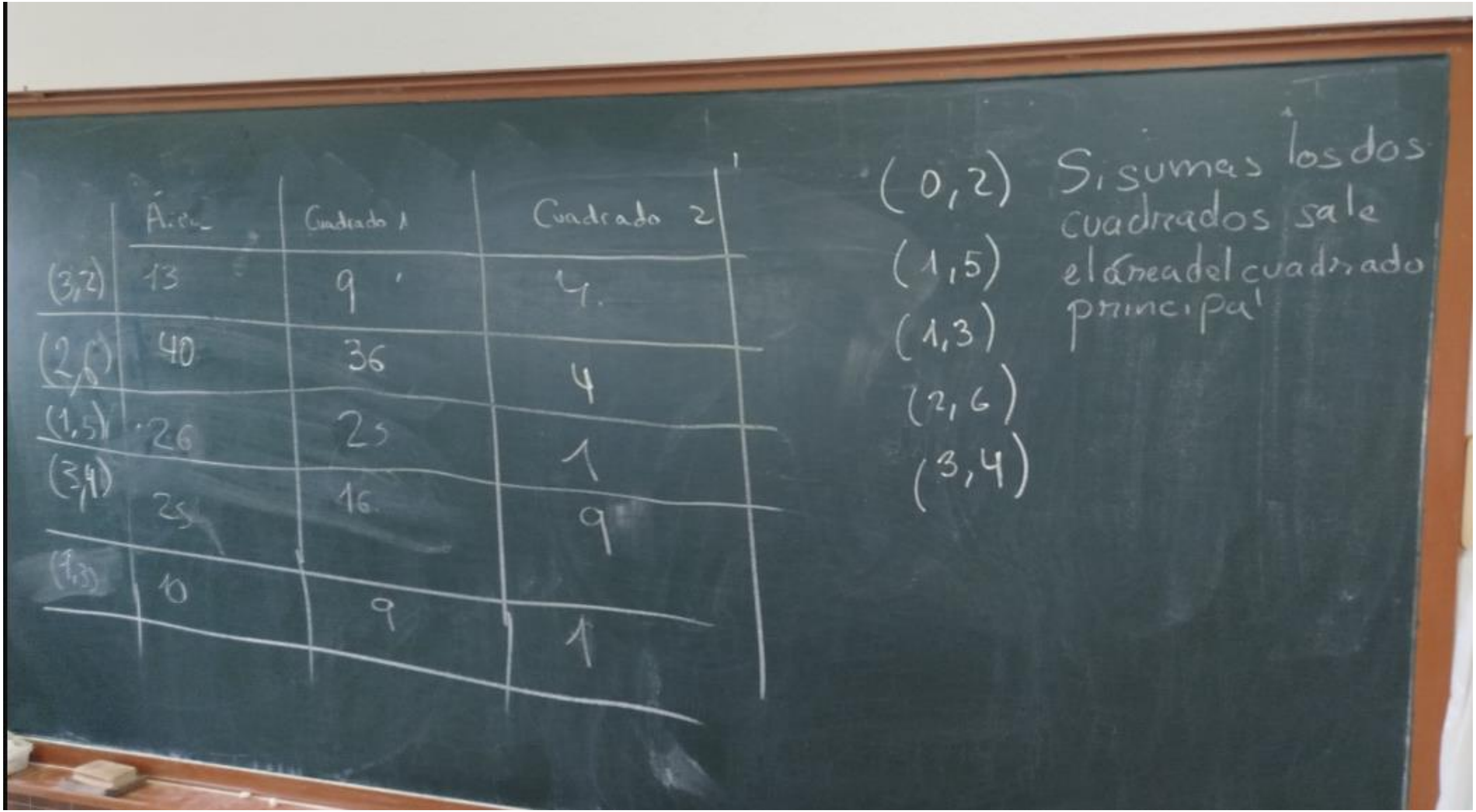


Domingo Benito
@Dominbenito

No sabría cómo explicaros esto que ha pasado hoy en mi clase con los de 6º.
#Matemáticas #AulasparaPensar #Geometría



3:31 p. m. · 13 may. 2025 · **5.842** Visualizaciones


Área
Cuadrado 1
Cuadrado 2
(3,2) 13 9 4
(2,6) 40 36 4
(1,5) 26 25 1
(3,4) 25 16 9
(1,3) 10 9 1
(0,2)
(1,5)
(1,3)
(2,6)
(3,4)
Si sumas los dos cuadrados sale el área del cuadrado principal

Medida de ángulos y construcciones con regla y compás

Propuesta diseñada junto con Manuel Jesús Siaba Lestón, quien la puso en práctica en su clase de 4º de Primaria

Hay que conseguir que la puerta de la clase de al lado esté igual de abierta que la nuestra

Conseguir que la puerta de la clase de al lado esté igual de abierta que la nuestra.

1º Pensamos en abrir la puerta en la medida del lápiz, papel y goma

2º Enrollamos el folio para que no se doblara y estuviera estable.

3º Hicimos una representación de la puerta con el papel.

ideas que pueden funcionar:

el lapiz

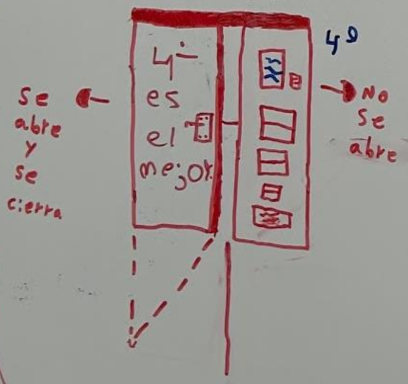
la goma

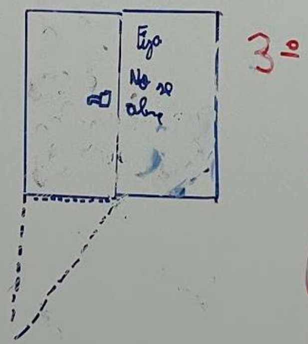
el papel enrollado.

ideas que no funcionan:

el papel sin doblar.

Representaciones:

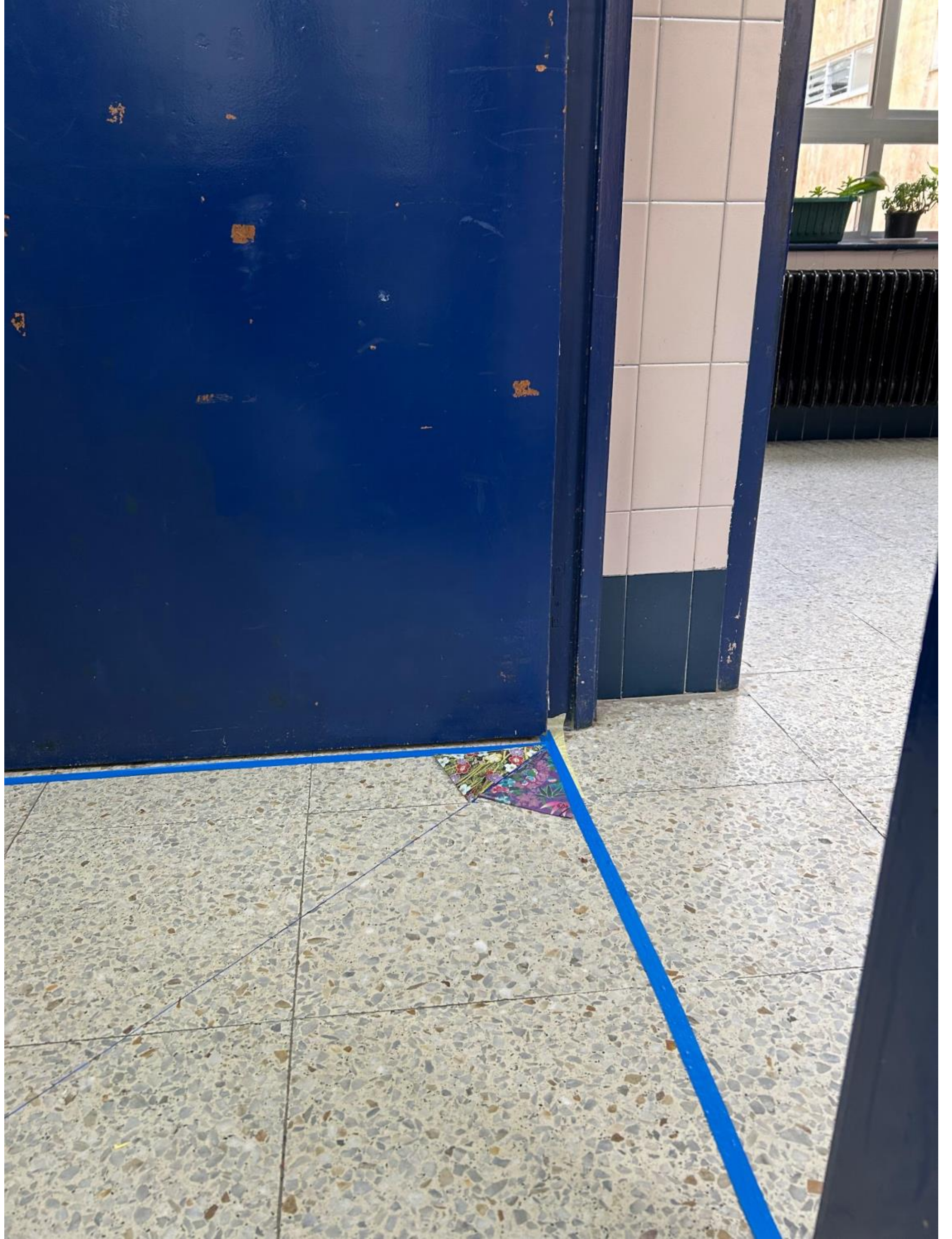




4º Abrimos la puerta al máximo y lo marcamos con linea descontinua, despues la cerramos al máximo y la marcamos con linea descontinua. Después marcamos una linea conectando las 2 partes y eso es el intermedio

5º si poníamos el papel acostado, no conseguíamos ver si estaban iguales entonces lo pusimos de pie.

Hay que conseguir que la puerta de la clase de al lado esté igual de abierta que la **ventana**



1:- Hacemos un triángulo rectángulo. (En el papel)

2: Marcamos todos. los angulos del papel.

3:- Darle la vuelta y doblar el rectangulo para atras. Lo recortamos

4:- Lo doblamos en diagonal

5:- Abrimos la diagonal y lo fracionamos a la mitad.

6:- Doblamos la punta asta la línea de la mita

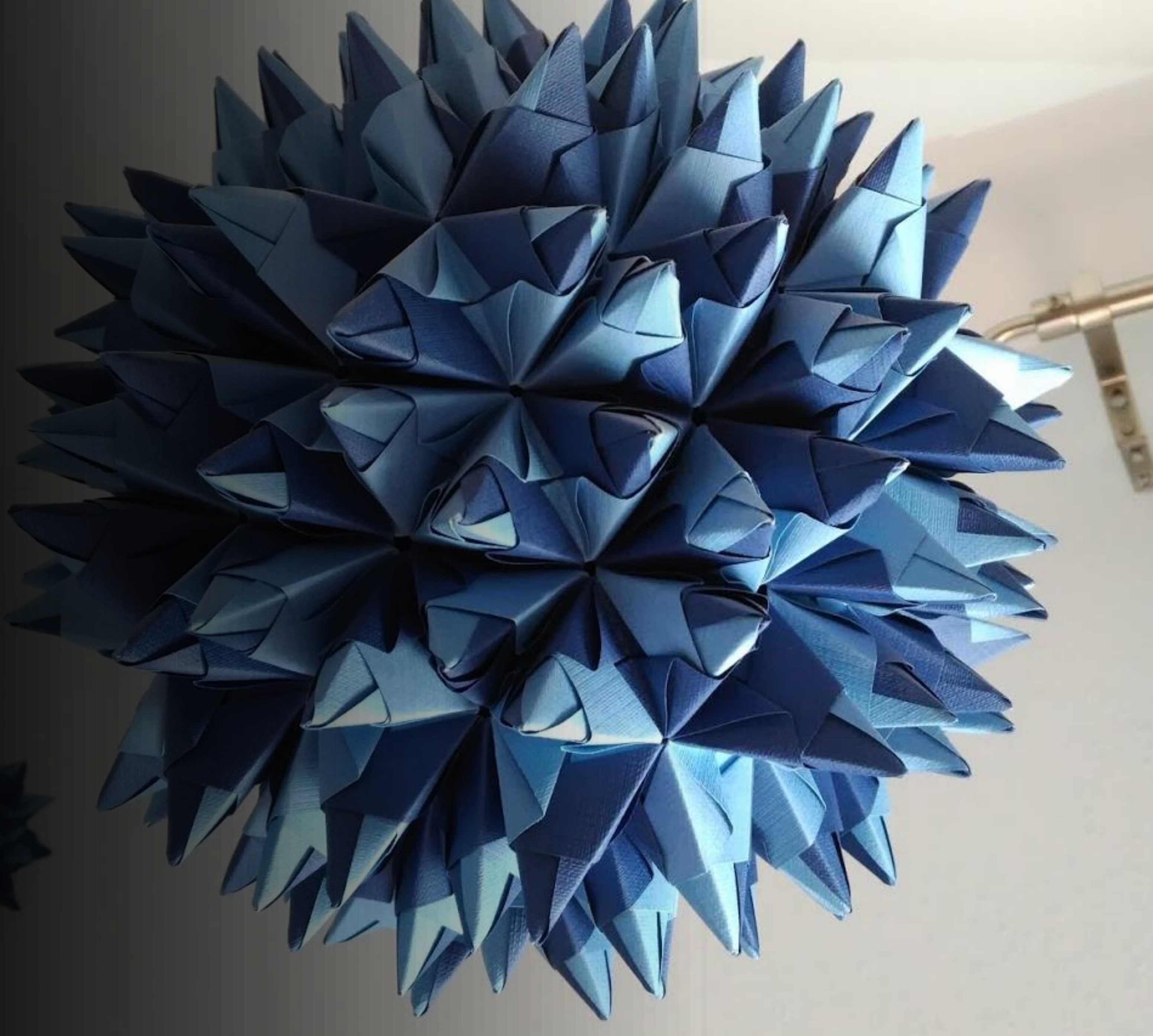
7º Doblamos la otra esquina acia la anterior

Hay que conseguir que la puerta de la clase de al lado esté igual de abierta que la ventana, utilizando como material una cuerda y un lápiz o similar

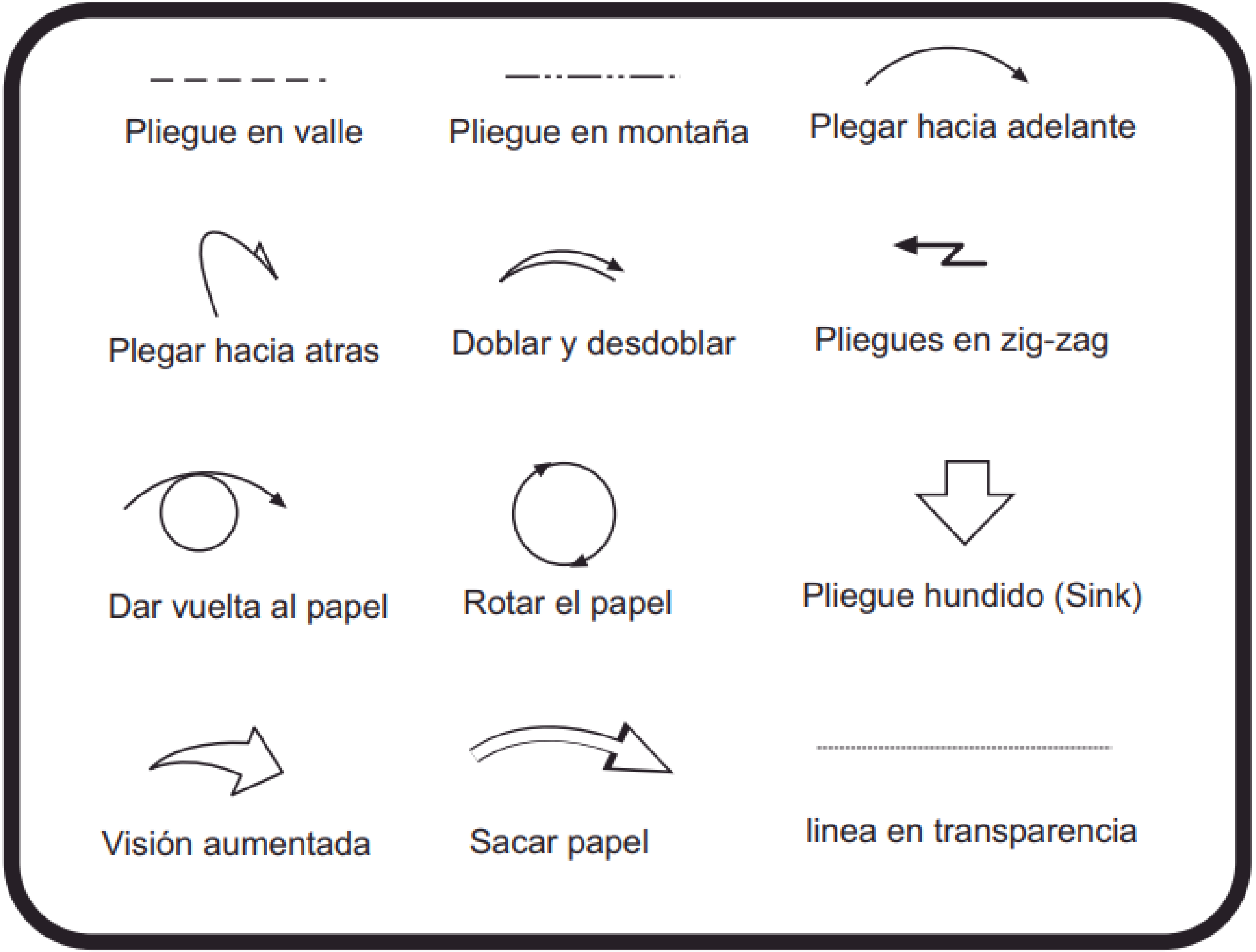

60°
45°

ORIGAMI (PAPIROFLEXIA) COMO RECURSO

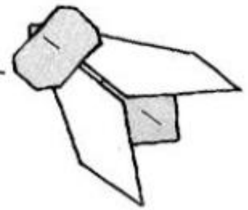
Origami y matemáticas y viceversa



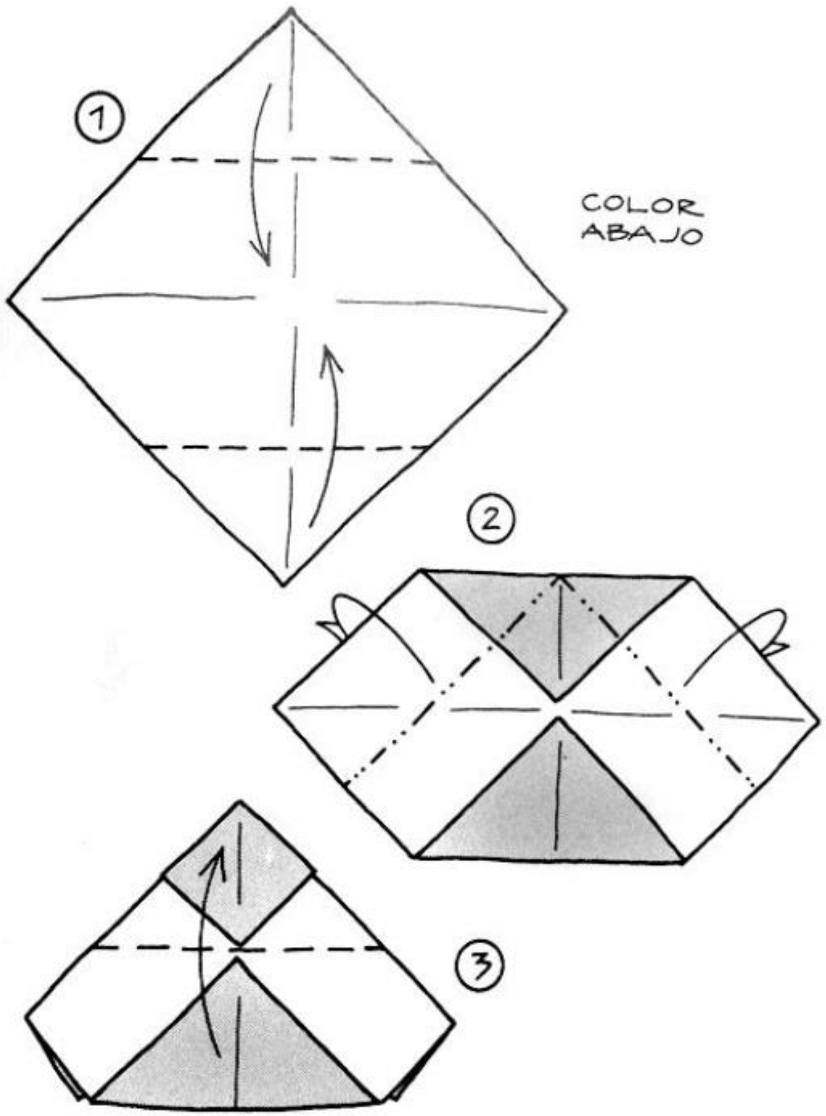
Dibuja un triángulo en tu hoja de papel…

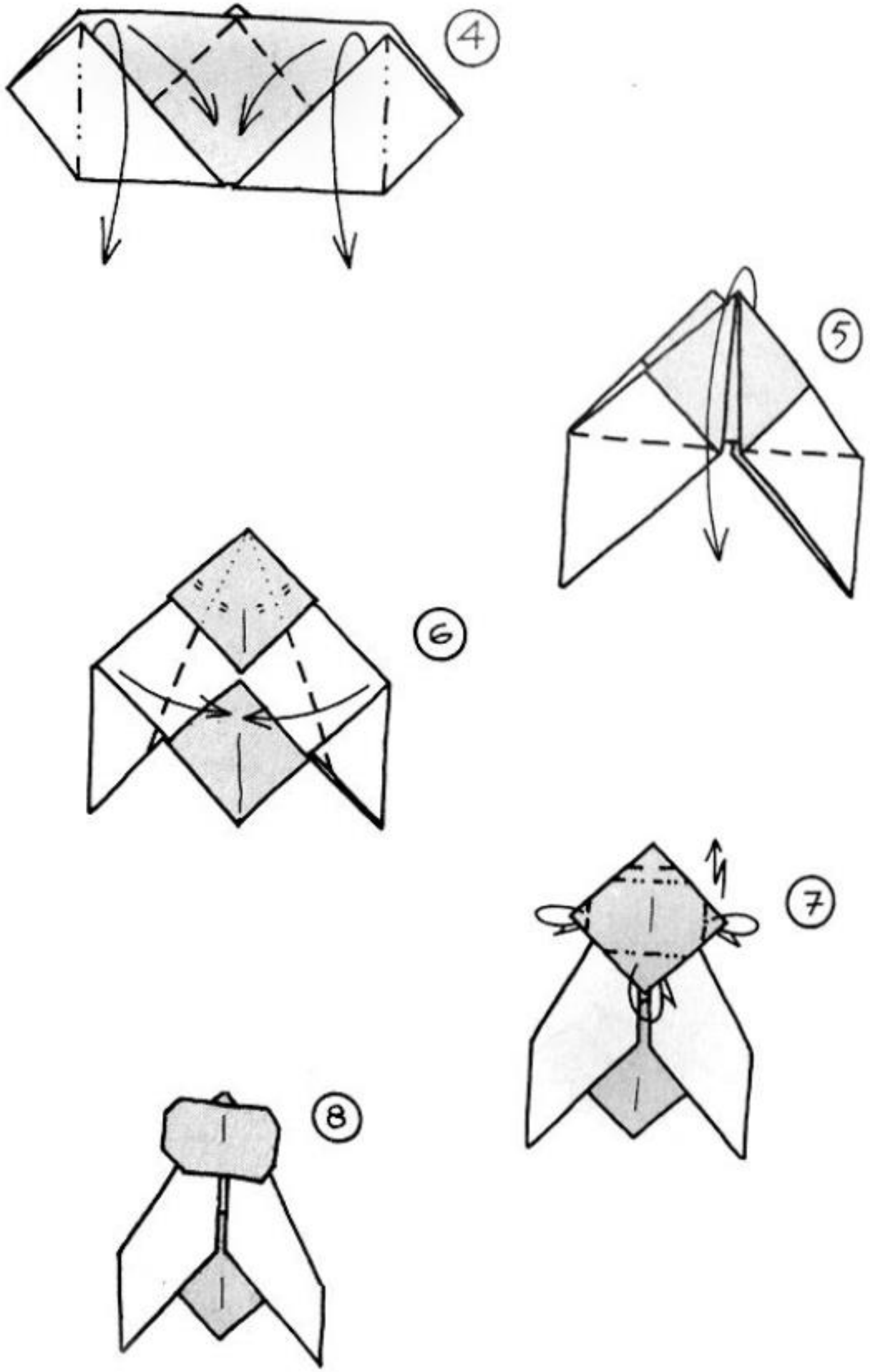

Pliegue en valle
Pliegue en montaña
Plegar hacia adelante
Plegar hacia atras
Doblar y desdoblar
Pliegues en zig-zag
Dar vuelta al papel
Rotar el papel
Pliegue hundido (Sink)
Visión aumentada
Sacar papel
linea en transparencia

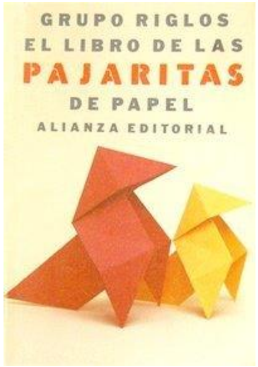
MOSCA



Angel Ecija





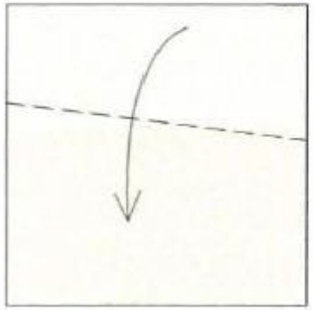


Construcción de un ángulo recto

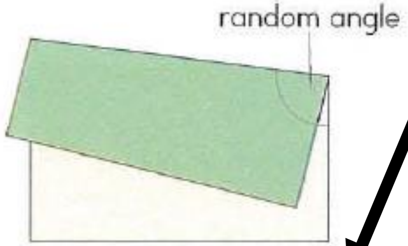
Desde un pedazo de papel de contorno arbitrario

Procedimiento

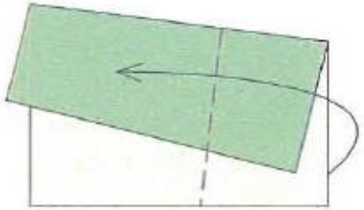
Observación



1. Begin with a square. Fold the top edge down at a random angle.



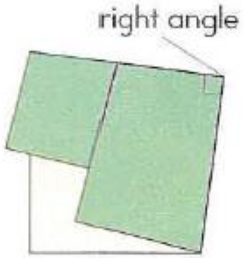
2. The random angle formed by your crease does not affect the process of folding a right angle.



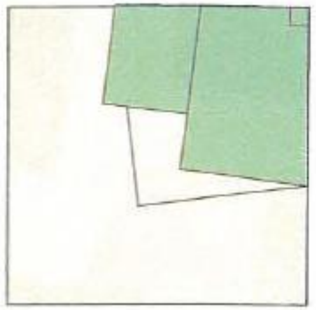
3. Fold the side over as much as desired, being sure to keep the top edges aligned.

¿Argumentación?
Porque…

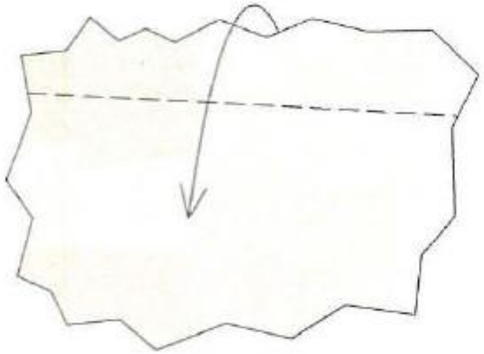
Comprobación



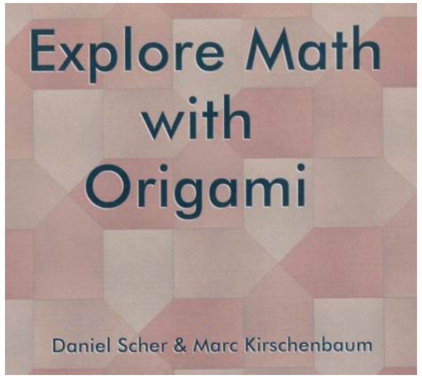
4. The corner forms a right angle. This is indicated by the L-shaped right-angle symbol. Place your corner atop another square to see how the corners match up.



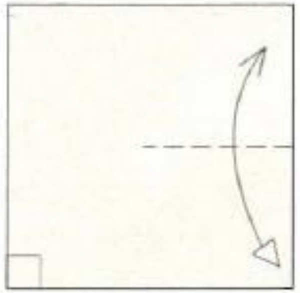
5. Since the corners of squares are right angles, the corner you created is also a right angle.



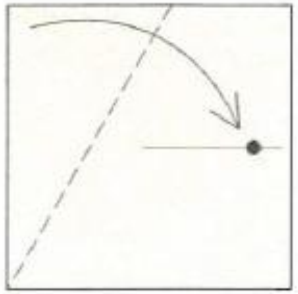
6. This works with any random shape (formed by tearing or cutting a sheet of paper). Fold the top edge down.



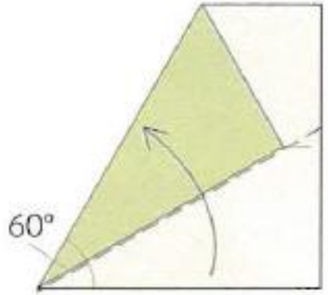
Construcción de un ángulo de 30º



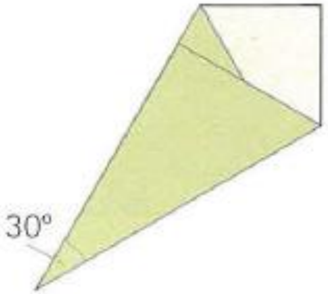
1. Begin with a square. You will be focusing on the right angle in the lower-left corner. Precrease the right side in half.



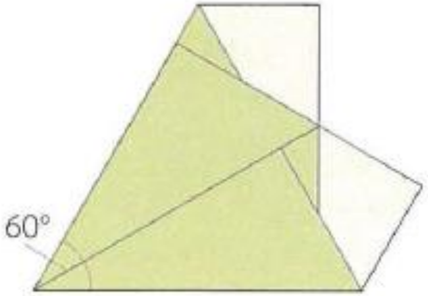
2. Fold the corner to the dotted crease.



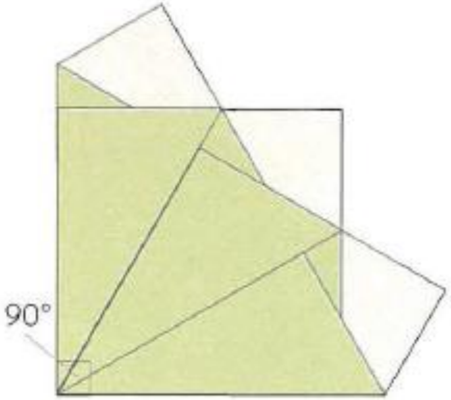
3. The angle at the corner is now 60°. Fold the edge up to the top, bisecting the angle.



4. The angle is now 30°. Make more of these pieces (steps 1-3), so you can explore what happens when you combine them.

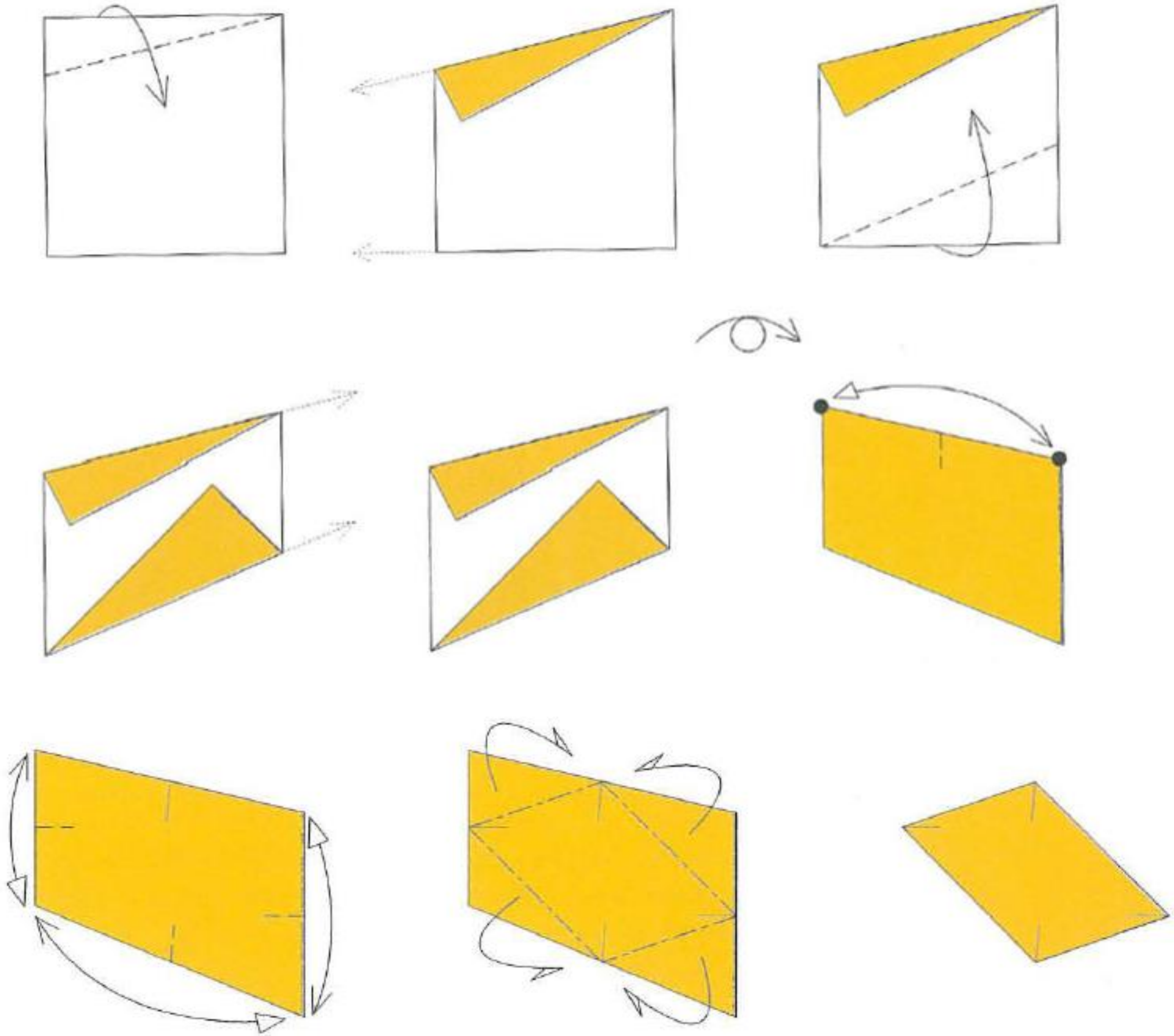


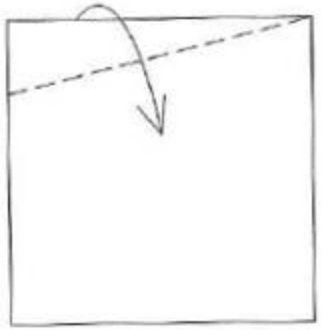
5. Combining two pieces yields an angle of 60°. Add another piece.



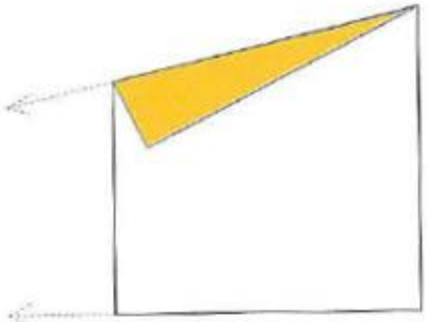
6. Three pieces now form a right angle (90°). Recall that you began with a right angle in step 1. Add another piece.

De un cuadrilátero cualquiera a un paralelogramo

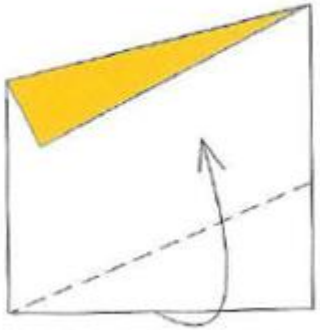




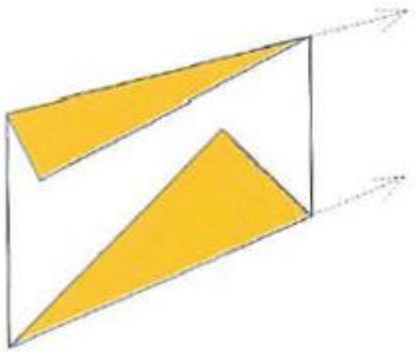
1. Begin with a square. Fold the top edge down partway at an angle of your choosing (starting from a corner).



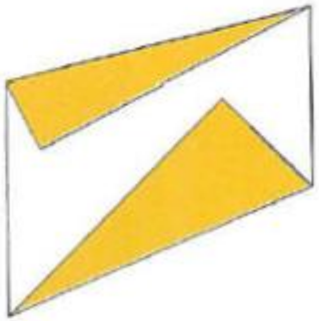
2. The top and bottom edges are no longer parallel. If you were to extend the edges along the direction of their taper, they would eventually intersect.



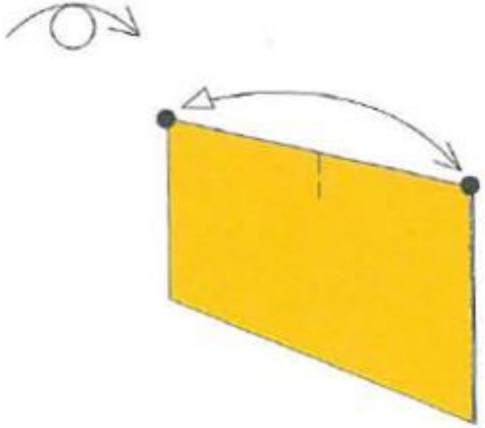
3. Starting from the opposite corner at the bottom, fold the edge in at an angle of your choosing. Be sure to choose a different angle from the one used at the top.



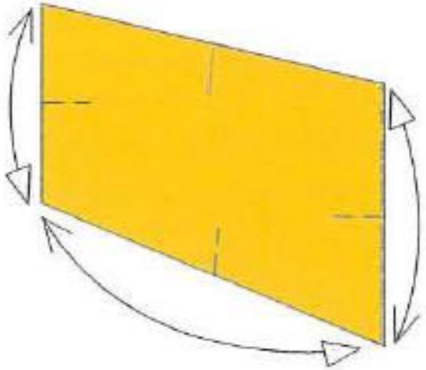
4. The top and bottom edges are no longer parallel. If you were to extend these edges along the direction of their taper, they would eventually intersect.



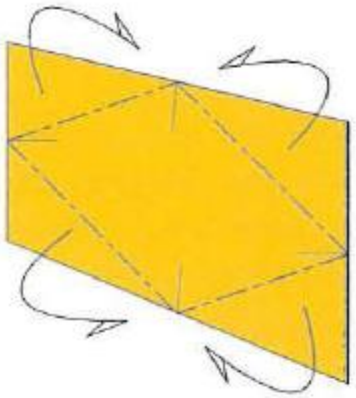
5. You have created a random quadrilateral, with edges of different lengths and corners of different angles. Turn it over.



6. Locate the midpoint by bringing the dotted corners together and then making a pinch at the edge.



7. Make a pinch mark on the remaining three midpoints.

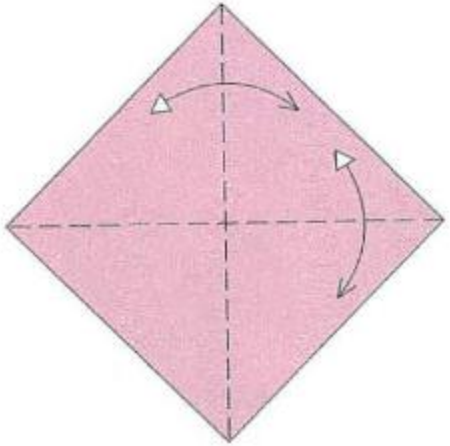


8. Fold the four corners behind, making sure the folds hit the midpoint pinch marks.

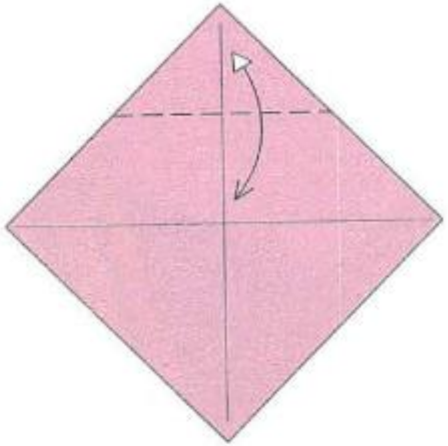
9. Surprise! Your random quadrilateral has transformed into a parallelogram.

El cuadrilátero en el paso 5 no es completamente aleatorio, ya que no se garantiza que dos de sus lados sean paralelos. Si lo deseas, dobla un lado más para que ningún lado sea paralelo.
Experimenta con diferentes cuadriláteros para ver cómo afectan la apariencia del paralelogramo.
¿Por qué un cuadrilátero cualquiera se convierte en un paralelogramo cuando se conectan sus puntos medios?

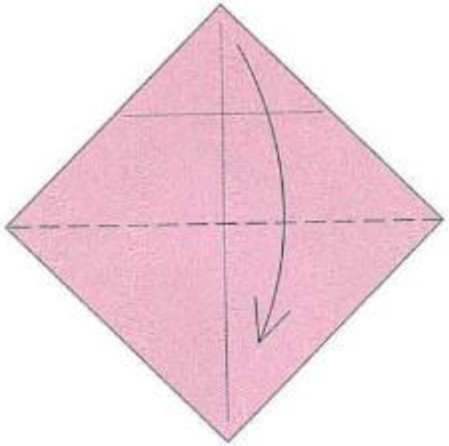
Una mosca geométrica



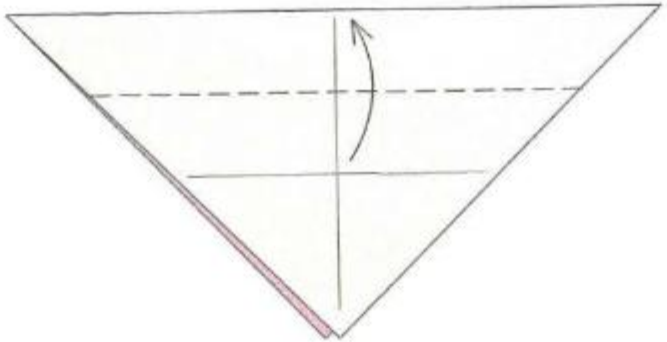
1. Begin with a square. Precrease in half along both diagonals.



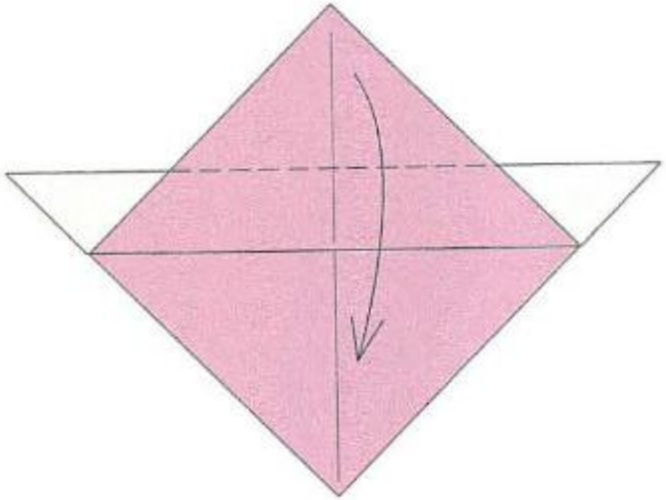
2. Fold the corner to the center and then unfold.



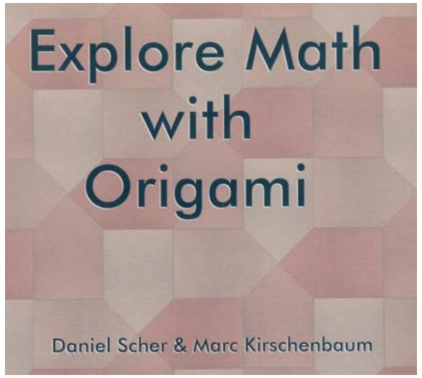
3. Fold in half along the existing crease.

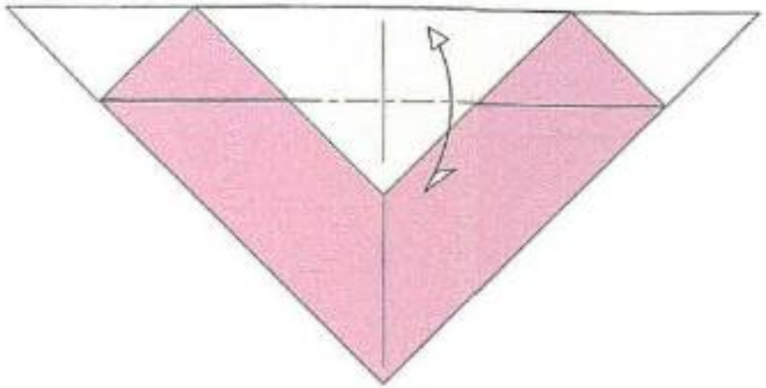


4. Fold the existing crease to meet the top edge.

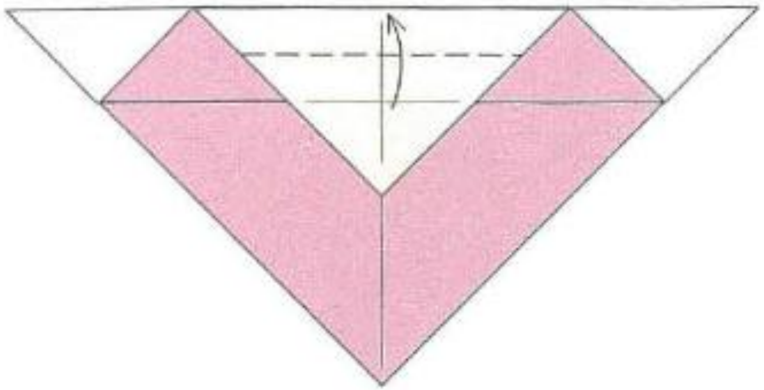


5. Fold down along the existing crease.

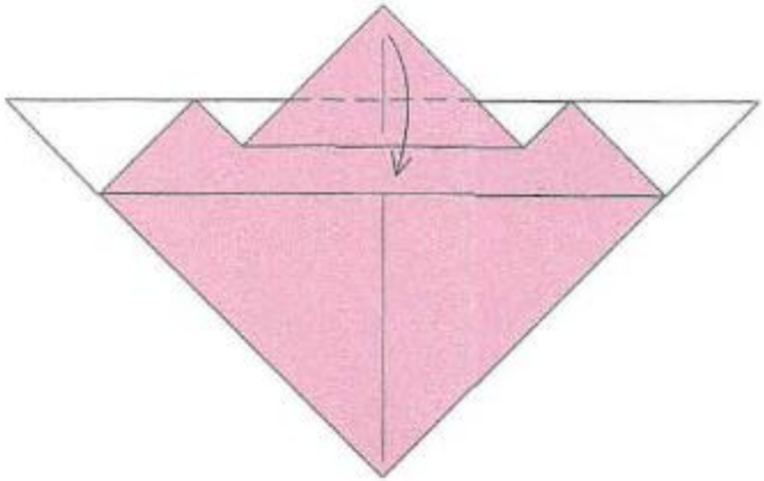




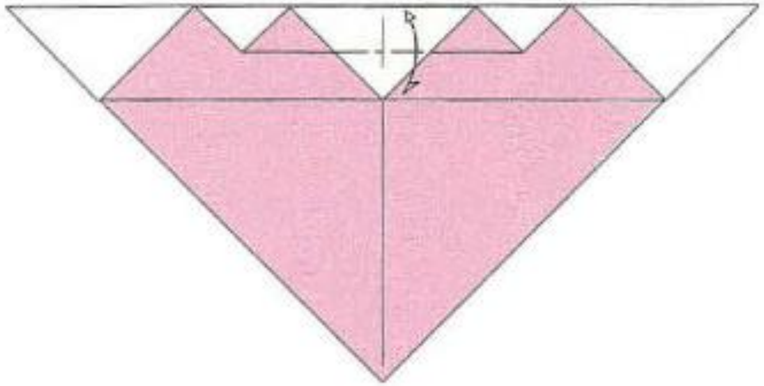
6. Form a crease by folding behind along the edge and then unfolding.



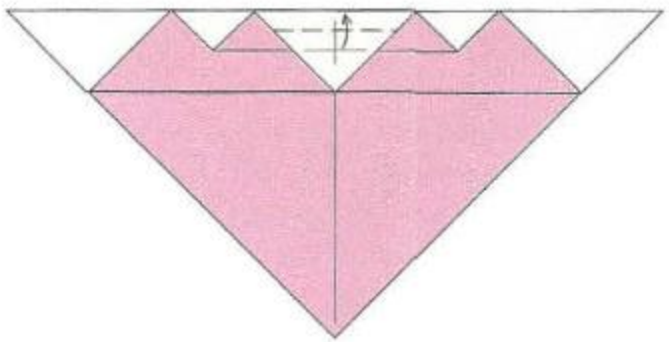
7. Fold the existing crease to meet the top edge.



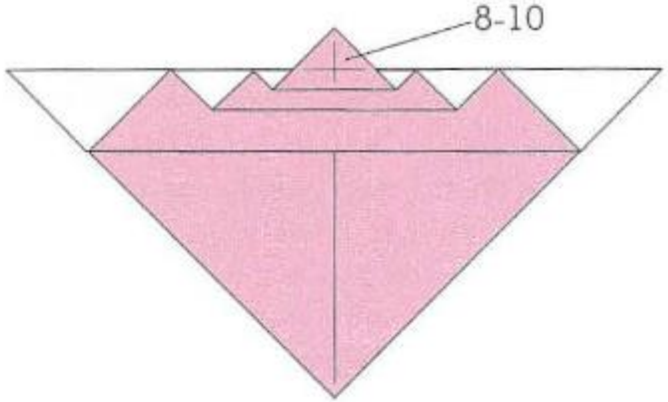
8. Fold down along the existing crease.



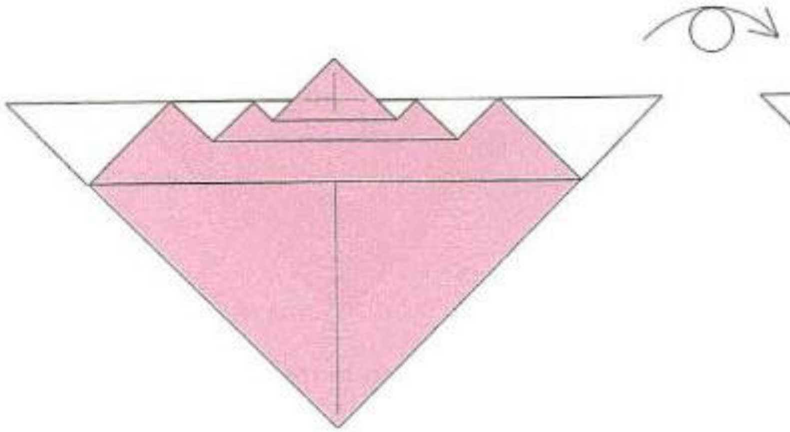
9. Form a crease by folding behind along the edge and then unfolding.



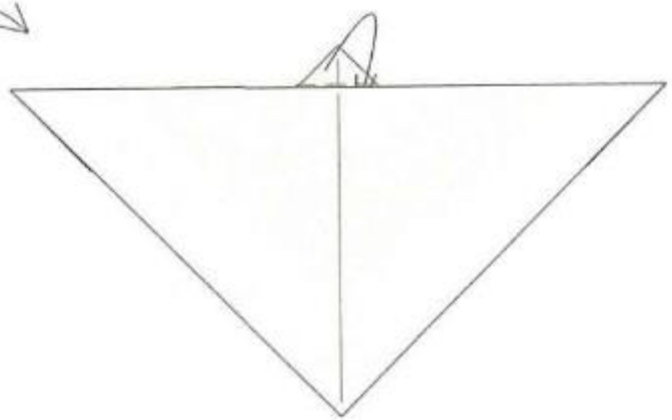
10. Fold the existing crease to meet the top edge.



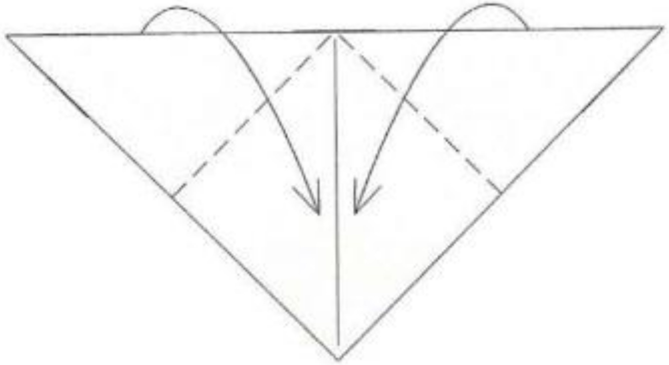
11. You can repeat the sequence of steps 8-10 on the protruding flap as many times as you like.



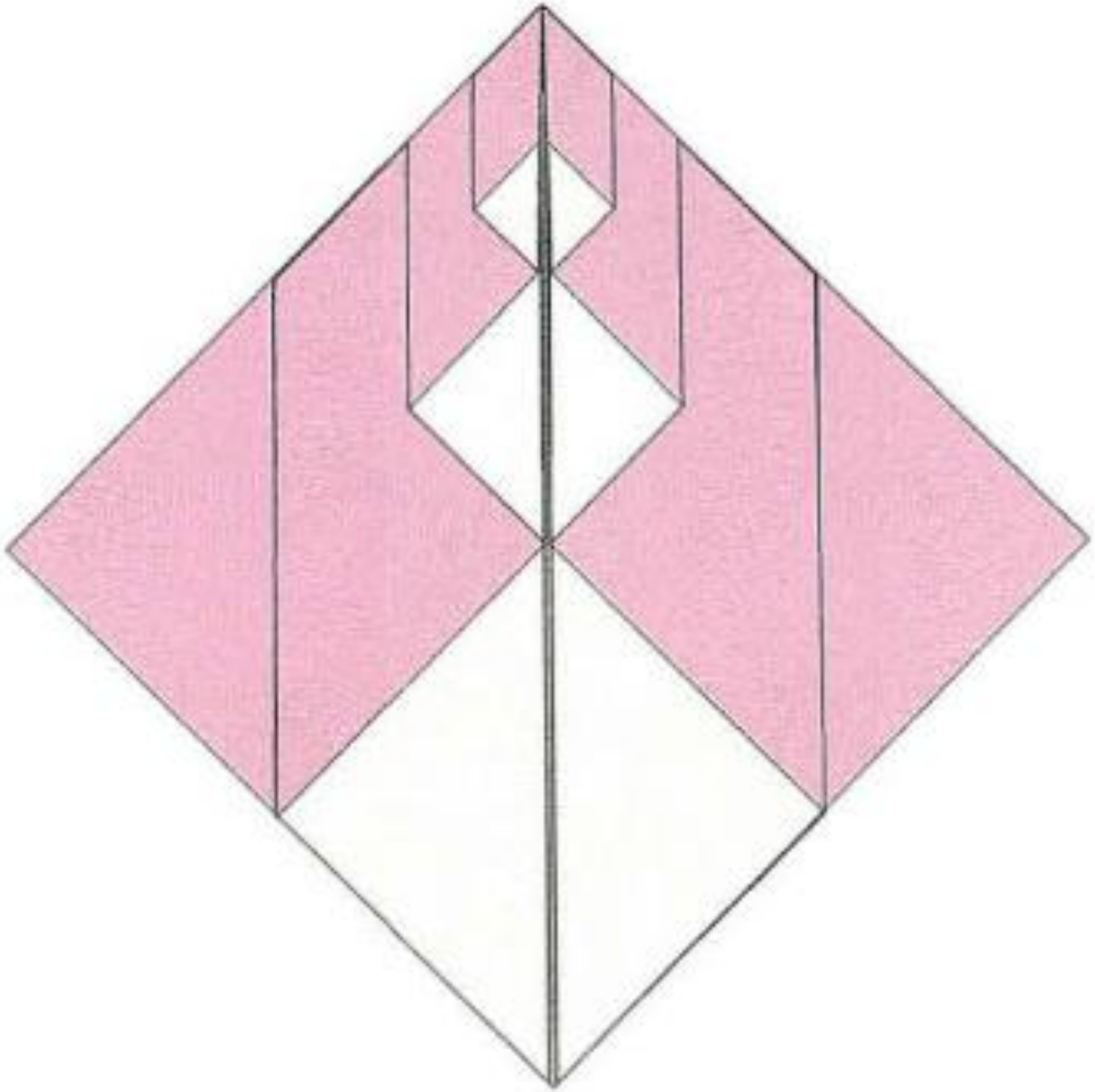
12. Since repeating steps 8-10 makes the folds very tiny, these diagrams will not continue this pleating sequence. Turn over.

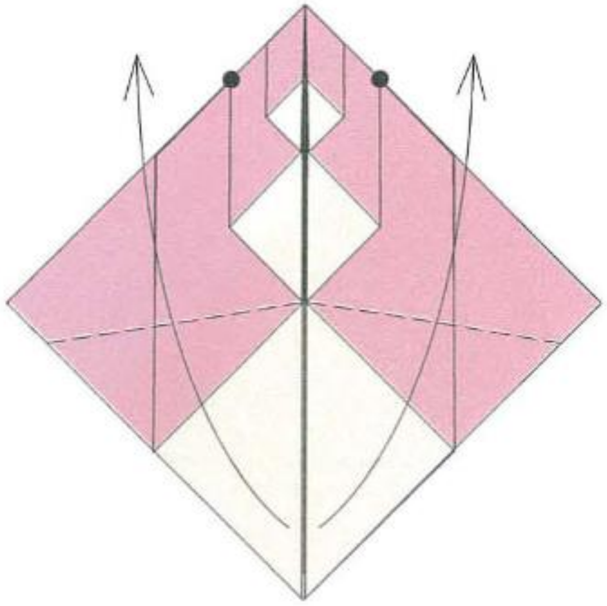


13. Tuck the flap inside. It is not critical which pocket you use.

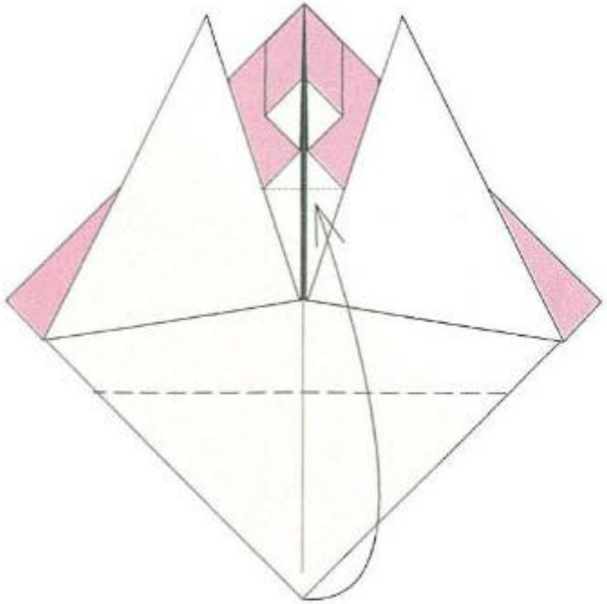


14. Fold the sides to meet at the center. Curling the paper slightly will keep the flaps in place (or simply use tape or glue).

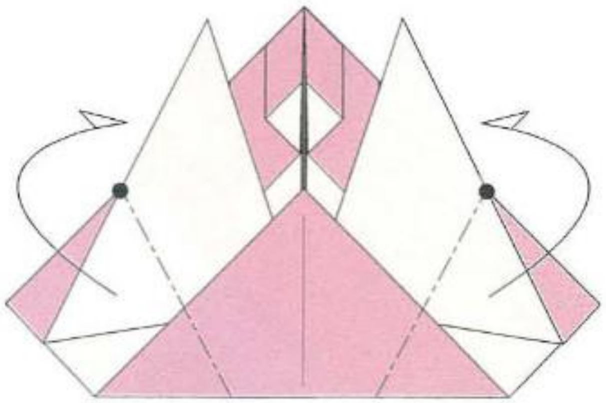




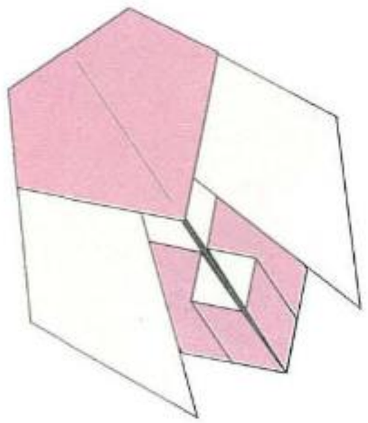
1. Start with the *Geometric Series* model (any number of iterations will work). Fold up the bottom flaps so the edges hit the dotted corners.



2. Fold the corner to the imaginary line.



3. Fold the sides in starting from the dotted corners. The angle is to taste.



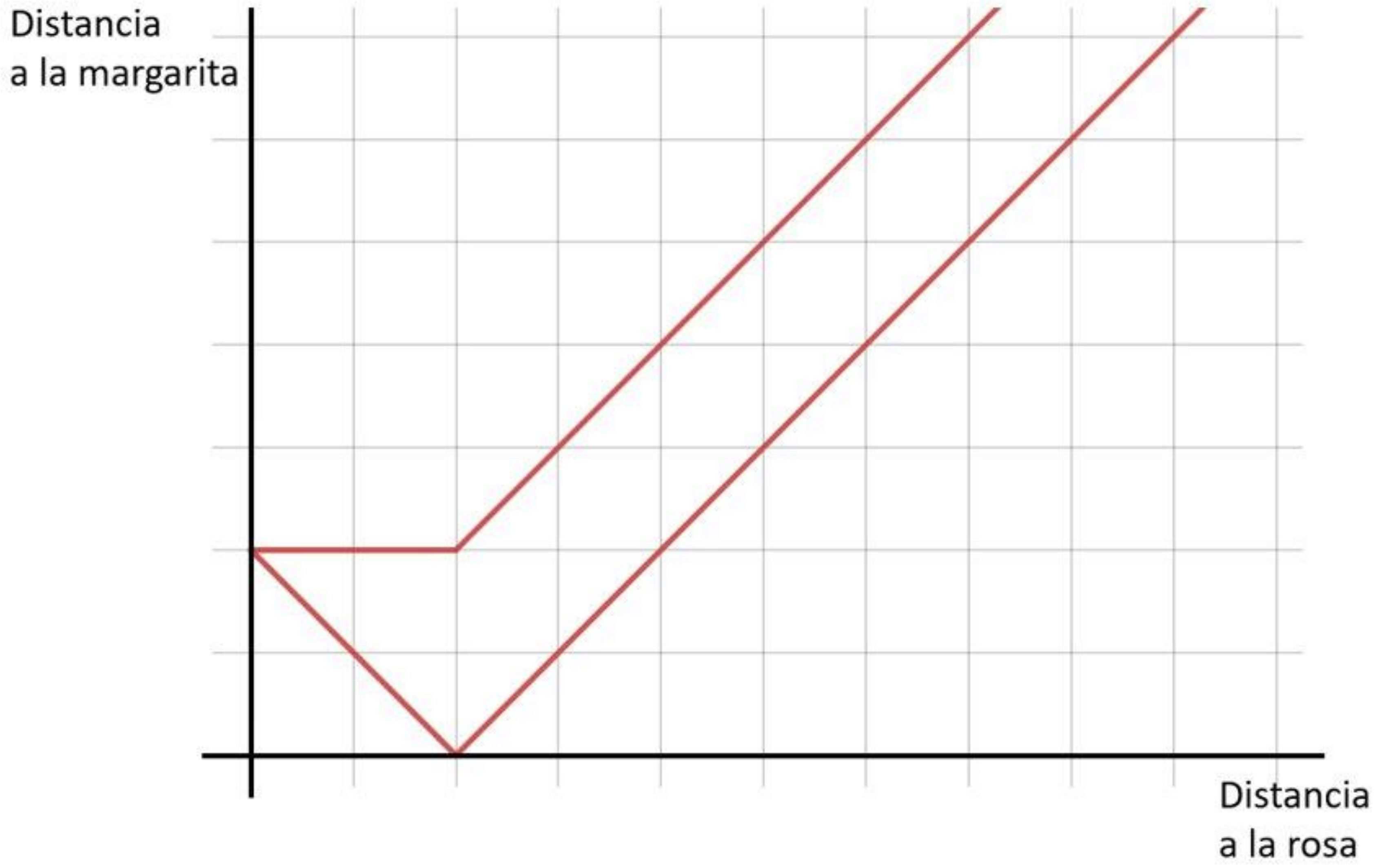
4. The completed *Geometric Series Bug*.

Algunos materiales más

Polydron y geotiras

Jugando con trayectorias de vuelo

La gráfica representa la distancia a la que se encuentra una abeja de dos flores (una margarita y una rosa). Describe y dibuja su trayectoria de vuelo, razonando tu respuesta.



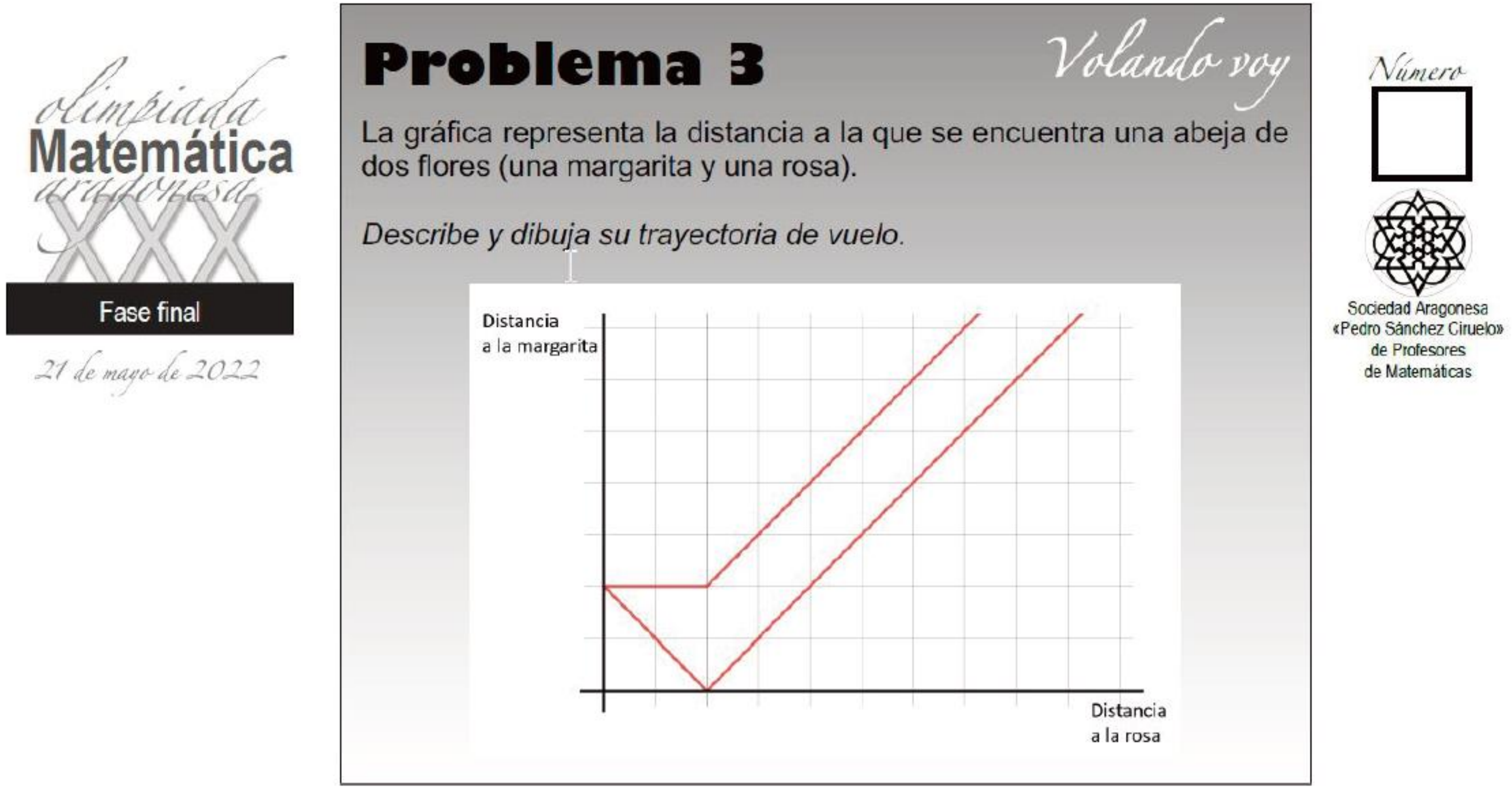
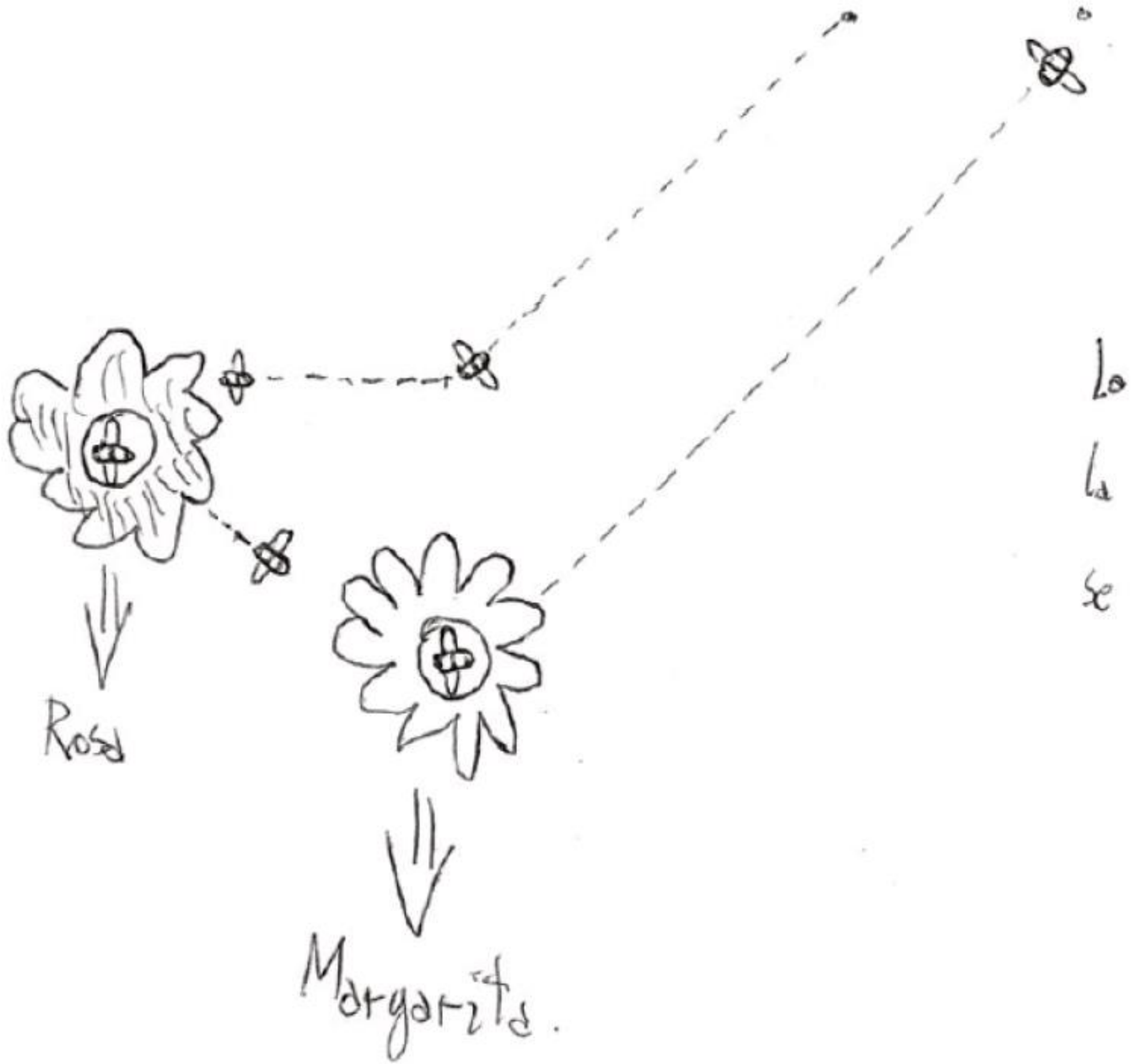


Figura 1. Enunciado del problema



La abeja baja en diagonal, va horizontalmente hasta la rosa, baja diagonalmente hasta la margarita y se va diagonalmente hacia arriba.

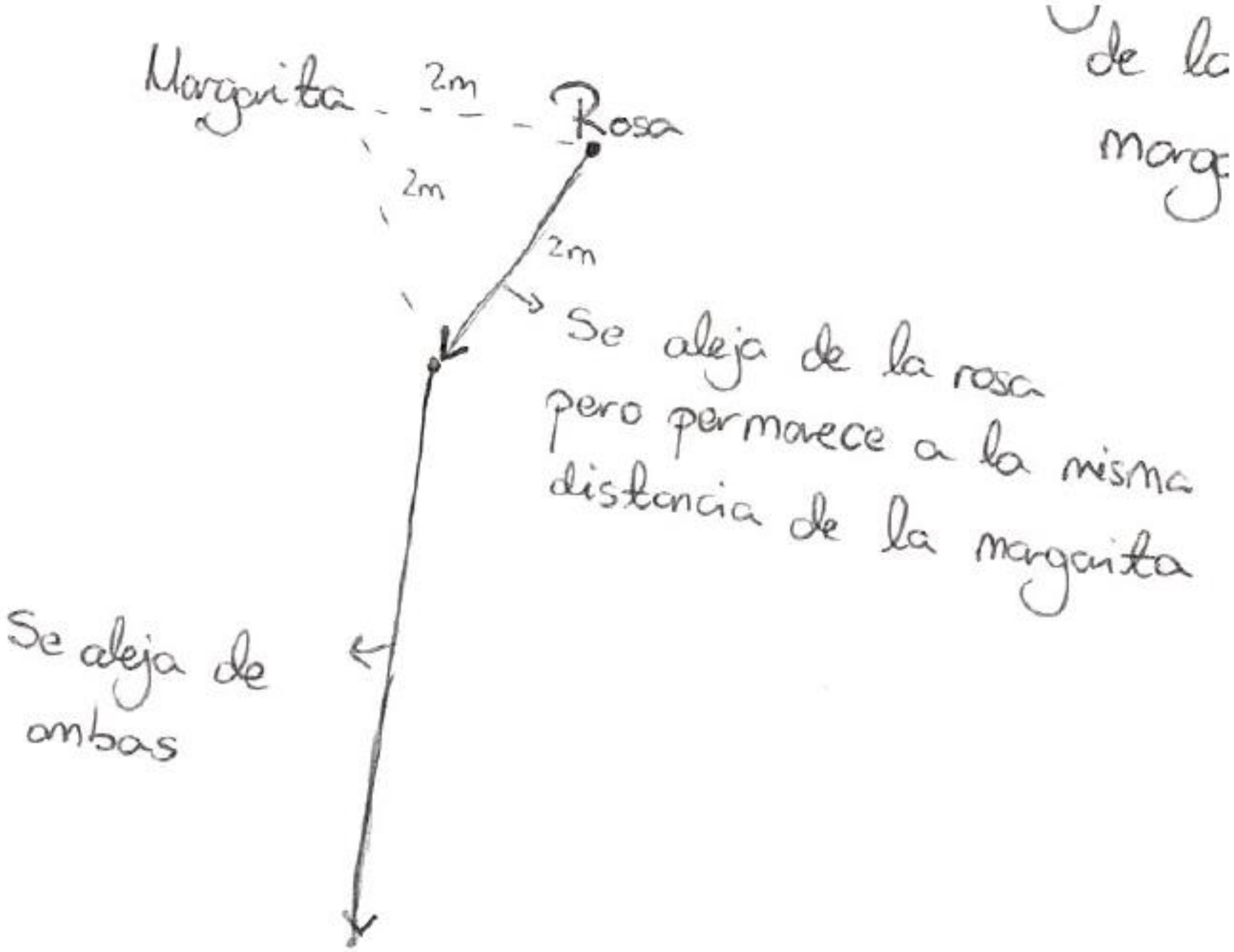
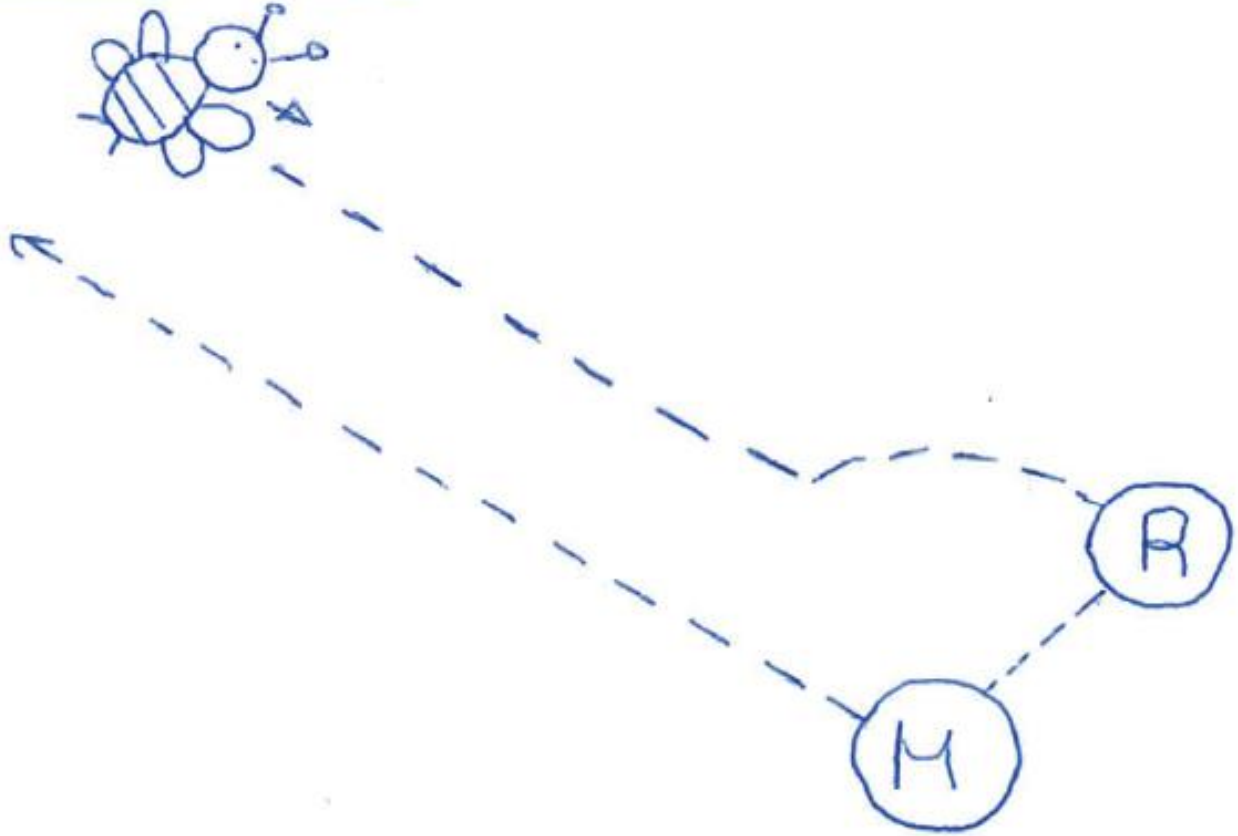
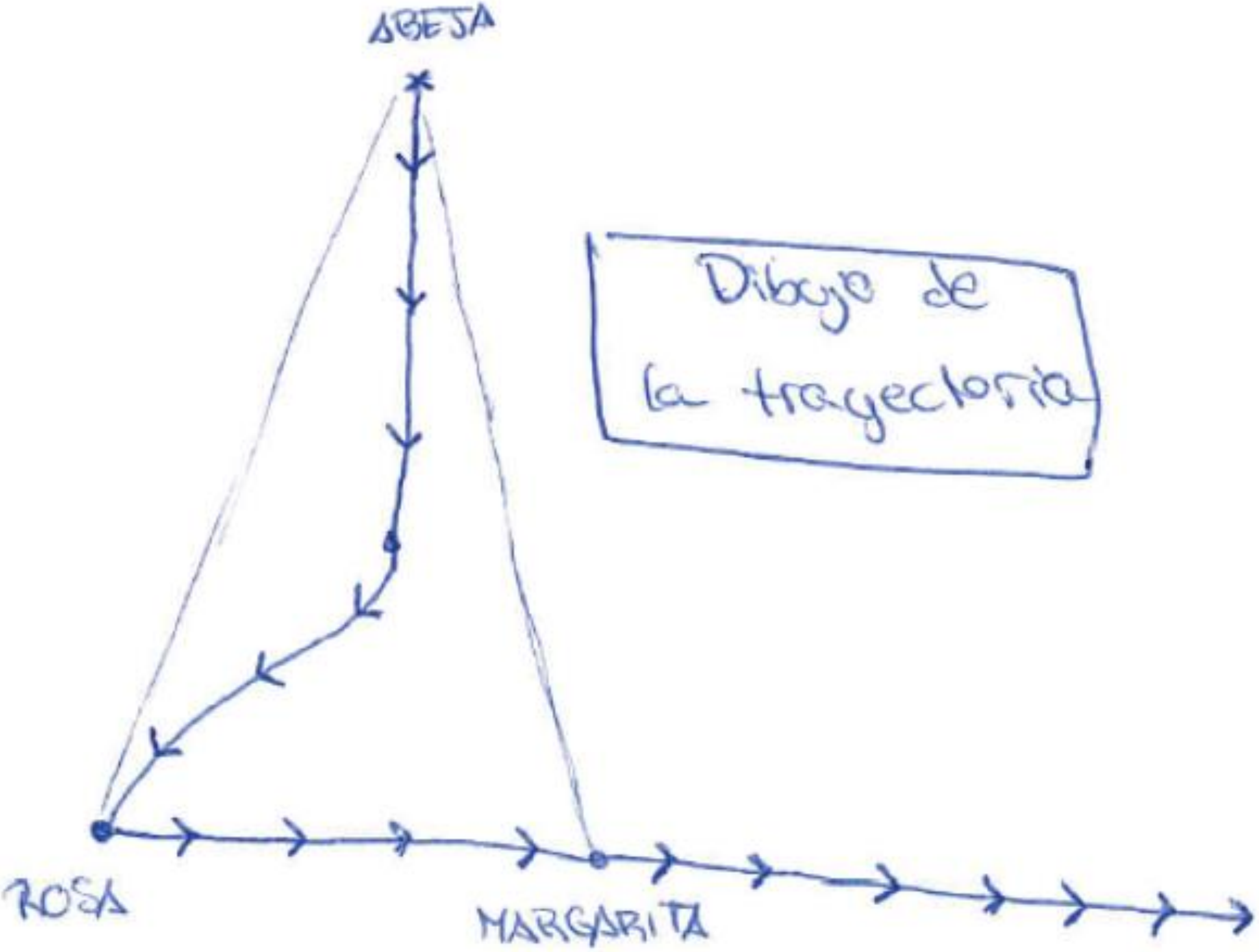


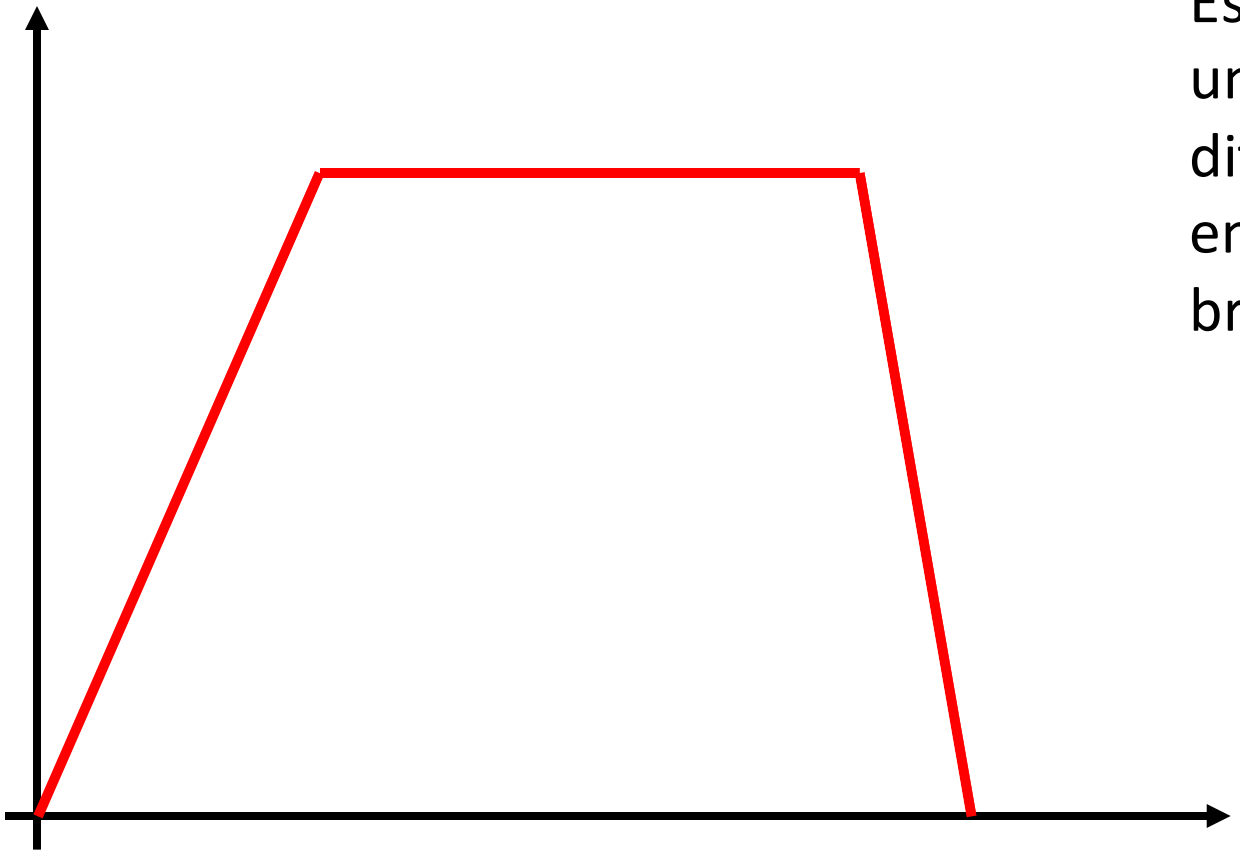
Figura 4. Identificación del segmento correspondiente a la mediatriz

DIBUJO

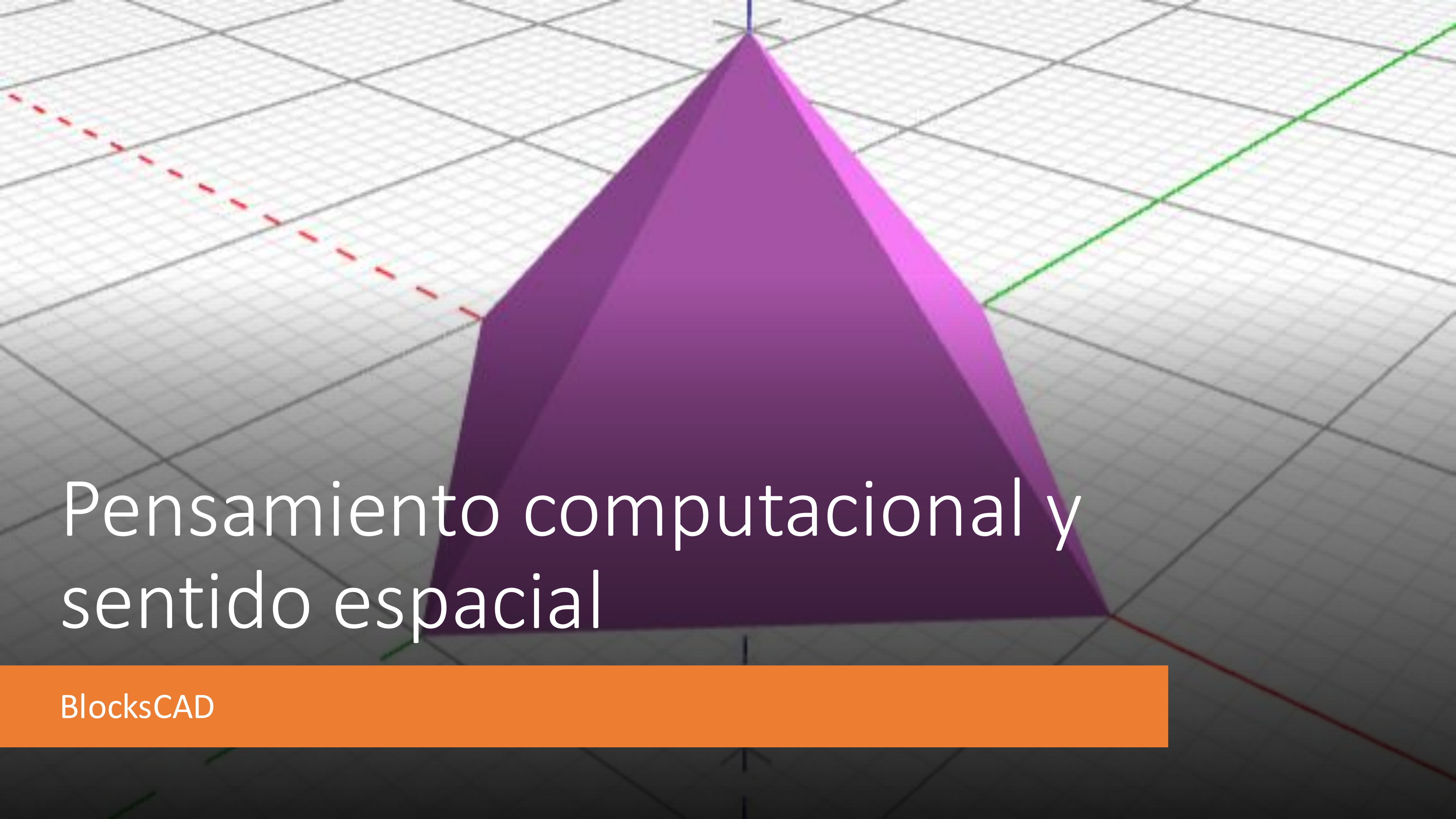



ABEJA
Dibujo de
la trayectoria
ROSA
MARGARITA

Vamos a inventarnos historias



Esta gráfica puede representar un montón de vuelos diferentes de una abeja. Piensa en un par de ellos, con una breve descripción.



Pensamiento computacional y sentido espacial

BlocksCAD

URL de las actividades

- La web de BlocksCAD es: https://www.blockscad3d.com/editor/
- Taller: https://mat3d.github.io/
- Las actividades se han realizado con talleres en clases ordinarias de 3º/4º de ESO, así como en el Taller de Talento Matemático. También, en 6º de Educación Primaria.
- Conexión entre sentido espacial y pensamiento computacional.

Algunas referencias

Algunas referencias

- Actividad de medida de áreas. Prácticas de Didáctica de la geometría, del grado de Magisterio en Educación Primaria, de la Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza.
- Actividad del vuelo de la abeja:

    - Beltrán-Pellicer, P., & Muñoz-Escolano, J. M. (2023). Volando voy (Graphing Bee): final de la XXX Olimpíada Matemática de 2. º ESO. *Entorno Abierto, 50*, 4-7. https://www.researchgate.net/publication/368390186_Volando_voy_Graphing_Bee_final_de_la_XXX_Olimpiada_Matematica_de_2_ESO

- Sobre Pitágoras:

    - Beltrán-Pellicer, P. (2022). El teorema de Pitágoras a través de la resolución de problemas. *La Gaceta de la RSME, 25(1)*, 149–169. https://www.researchgate.net/publication/358738277_El_teorema_de_Pitagoras_a_traves_de_la_resolucion_de_problemas

- Sobre BlocksCAD:

    - Beltrán-Pellicer, P., Rodríguez-Jaso, C., & Muñoz-Escolano, J. M. (2020). Introduciendo BlocksCAD como recurso didáctico en matemáticas. *Suma, 93*, 39-48. https://www.researchgate.net/publication/341521318_Introduciendo_BlocksCAD_como_recurso_didactico_en_matematicas
    - Beltrán-Pellicer, P., & Muñoz-Escolano, J. M. (2021). Una experiencia formativa con BlocksCAD con futuros docentes de matemáticas en secundaria. *Didacticae: Revista de Investigación en Didácticas Específicas, 10*, 71-90. https://www.researchgate.net/publication/355357282_Una_experiencia_formativa_con_BlocksCAD_con_futuros_docentes_de_matematicas_en_secundaria

Algunas referencias

- Godino, J. D. (Coord.) (2003). *Proyecto Edumat-Maestros: Matemáticas y su Didáctica para Maestros*. Universidad de Granada. Disponible en https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros
- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, 32*, 55–70.
- Malloy, C. E. (1999). Perimeter and area through the van Hiele model. *Mathematics Teaching in the Middle School, 5*(2), 87-90.
- Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic Press.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Kluwer.
- Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *ZDM, 83*(1), 20-25.

SENTIDO ESPACIAL II

SESIONES DEL PLAN DE COOPERACIÓN TERRITORIAL PARA EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN ARAGÓN

6 de octubre de 2025

Pablo Beltrán-Pellicer

pbeltran@unizar.es

@pbeltranp

https://tierradenumeros.com

Universidad Zaragoza