PROPUESTAS METODOLÓGICAS II

SESIONES DEL PLAN DE COOPERACIÓN TERRITORIAL PARA EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN ARAGÓN

10 de noviembre de 2025

Pablo Beltrán-Pellicer

pbeltran@unizar.es

@pbeltranp

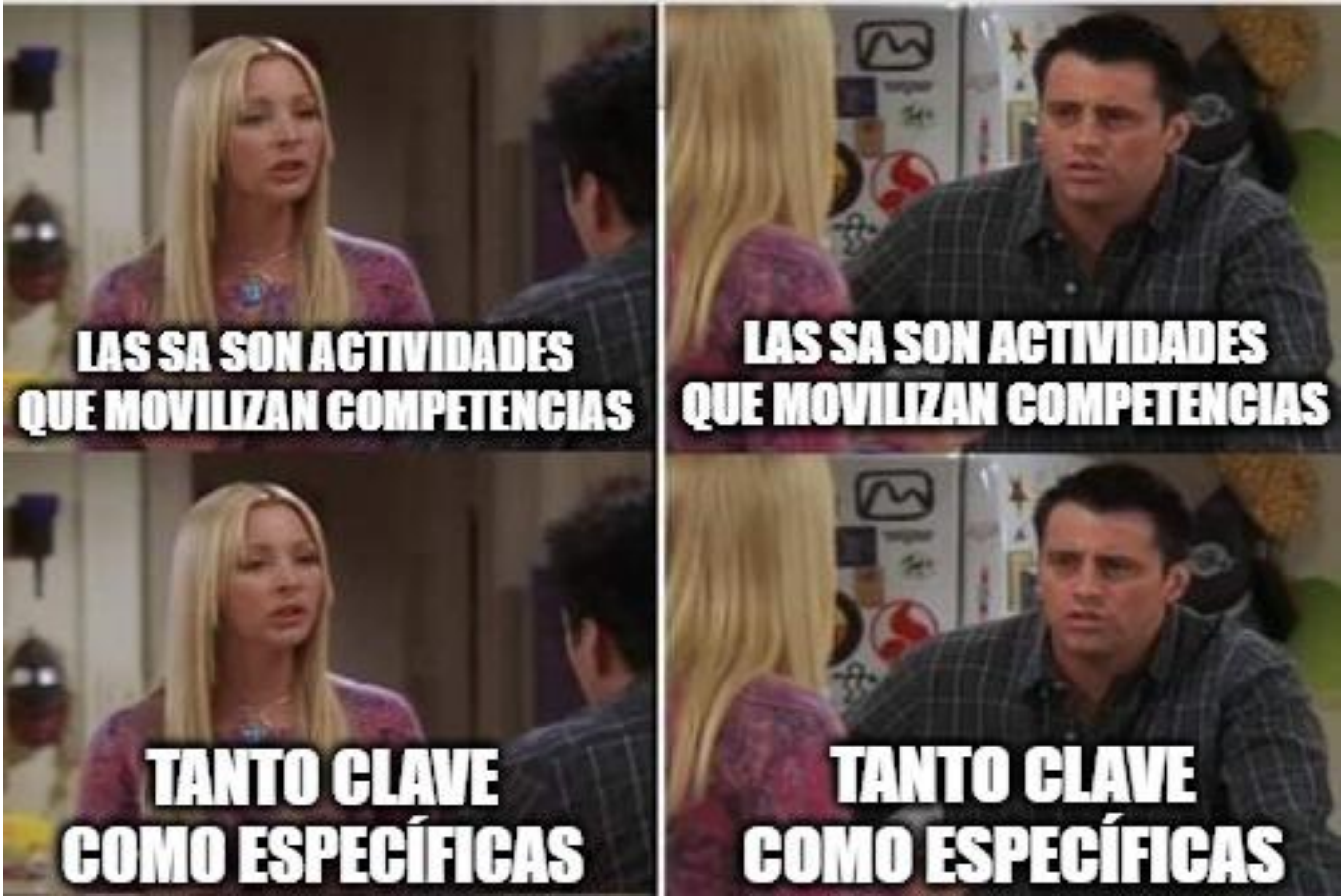
https://tierradenumeros.com

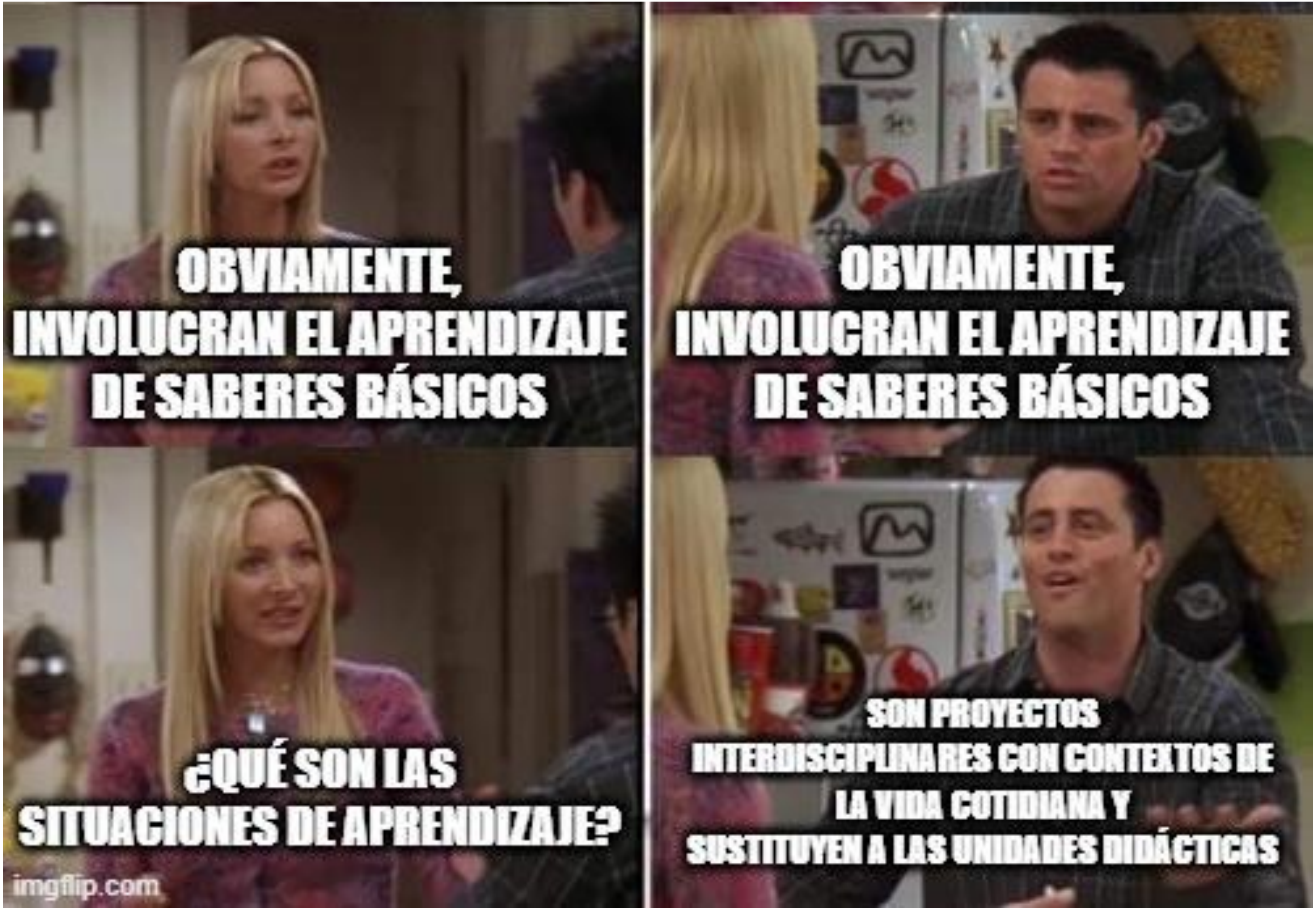
Universidad Zaragoza 1542

¿Qué vamos a hacer hoy?

- Aprendizaje basado en problemas y en proyectos. Distintas perspectivas, oportunidades y peligros.
- Enfoques funcionales y relacionales.
- Cultura de aula y afectividad.
- Trabajo colaborativo.
- Codocencia y Lesson Study.
- Secuencias de enseñanza a través de la resolución de problemas.

¿Qúé pasa con las situaciones de aprendizaje?


LAS SA SON ACTIVIDADES QUE MOVILIZAN COMPETENCIAS
LAS SA SON ACTIVIDADES QUE MOVILIZAN COMPETENCIAS
TANTO CLAVE COMO ESPECÍFICAS
TANTO CLAVE COMO ESPECÍFICAS


OBVIAMENTE, INVOLUCRAN EL APRENDIZAJE DE SABERES BÁSICOS
OBVIAMENTE, INVOLUCRAN EL APRENDIZAJE DE SABERES BÁSICOS
¿QUÉ SON LAS SITUACIONES DE APRENDIZAJE?
SON PROYECTOS INTERDISCIPLINARES CON CONTEXTOS DE LA VIDA COTIDIANA Y SUSTITUYEN A LAS UNIDADES DIDÁCTICAS
imgflip.com

busqueda de un objetivo
pensar y razonar
salida
predisposición
steam
interdisciplinar
cero claras
actualidad
competencia
imposibles
dificil
diversidad
calificación
contextualización
evolución
actividades ricas
situación
trabajo extra
investigar
lo de siempre
interdisciplinaridad
experiencia
aprendizaje
comprender
de todo
conectar
cambio
cotidiano
experiencias
autonomia
relacionar
apertura
global
formación
movilizar
conexiones
nervios
metodologia
transversal
problemas
motivación
proyecto
dificultad
locura
estrés
experimentar
actividades
ricas
confusión
reflexión
contexto
grupo
hacer
dudas
concepto
casa
construir
pensar
secienciación
razonar
interesante
interés
saber
saberes
problema
inclusivas
tarea
nueva
tareas
estress
proyectos
diseño
variedad
diseñar
neura
realidad
aplicación
resolver
evaluación
commpetencia
plantear
papeleo
incertidumbre
trabajo
novedad
innovación
autogestión
accion
positiva
excesivas
objetivo
incógnita
competencias
vida
practica
aburrimiento
recurso
contextualizar
formativas
reflexionar
introducción
tiempo
preguntarse
actividad matemática
competencial
aprender para la vida
hacer pensar
desconocimiento
ayudar en el pensamiento

¿Qué es el contexto? ¿Y tú me lo preguntas?

Educación Matemática Realista

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the learning of mathematics, 25*(2), 2-23.

Although, in general, the term 'context' is often normatively employed as a requirement that the teaching and the problems used for it are authentic and reflect real-life situations (Wedege, 1999), this is not true for RME. Within this approach to mathematics education, 'realistic' means that the context of the problems is imaginable for the students. However, it must be acknowledged that the name *Realistic Mathematics Education* is somewhat confusing in this respect. This all has to do with the Dutch verb *zich REALISE-ren* that means *to imagine*. This implies that it is not authenticity as such, but the emphasis on making something real in your mind that gave RME its name. For the problems presented to the students, this means that the context can be one from the real world, but this is not always necessary. The fantasy world of fairy tales and even the formal world of mathematics can provide suitable contexts for a problem, as long as they are real in the students' minds and they can experience them as real for themselves.

ABProblemas vs ABProyectos

- En un proyecto… ¿cuál es el papel de las matemáticas?
- ¿Se movilizan competencias específicas de las matemáticas?
- ¿Se construye conocimiento matemático?
- ¿Estamos realmente ante un proyecto?

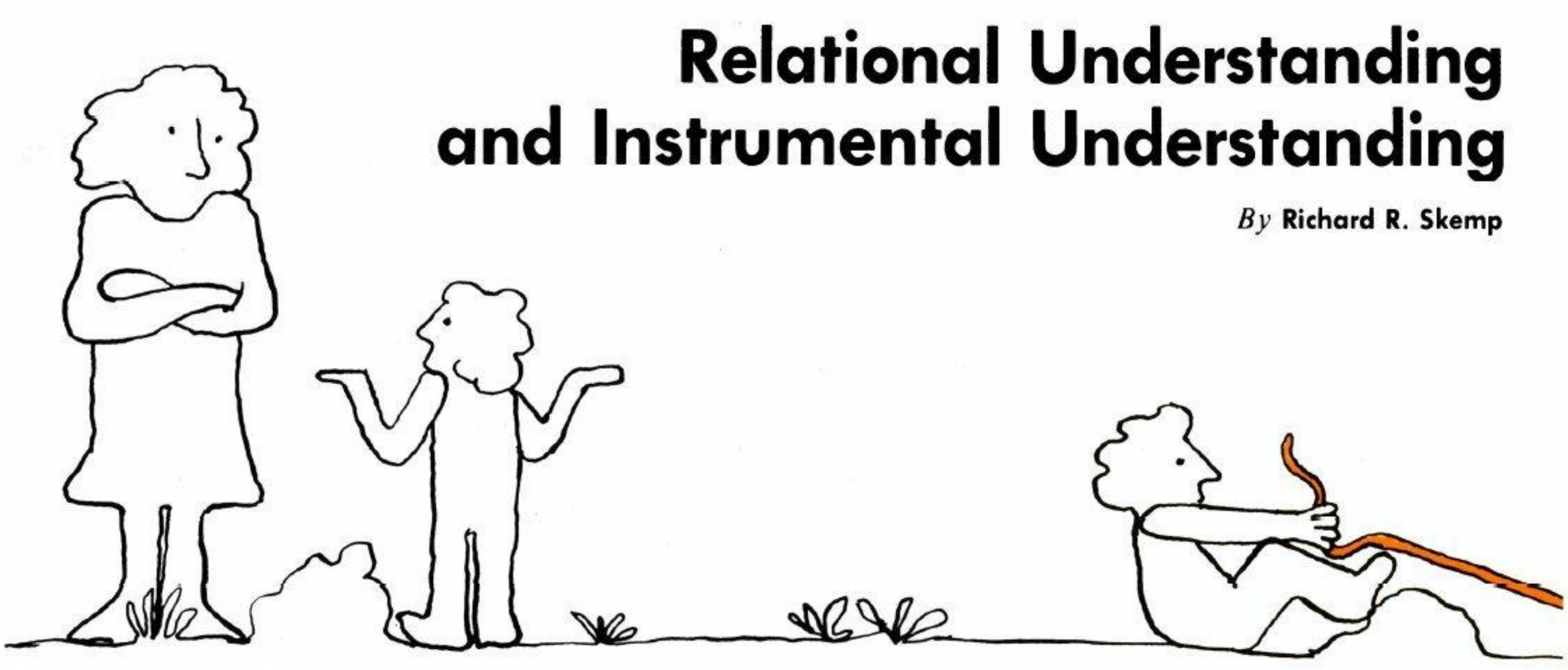
Enfoques instrumentales vs relacionales

A este equipo de fútbol se le dice que tiene que jugar un partido el domingo a las 18:00.

Enfoques instrumentales vs relacionales

A este equipo de fútbol también se le dice que tiene que jugar un partido el domingo a las 18:00.

Enfoques instrumentales vs relacionales



Enseñanza “a través de la RP” vs “para la RP”

El orden que sigue una secuencia ***para*** la RP es:

1. Esto se hace así.
2. Ejercicios sin contexto.
3. Ejercicios con contexto, pero les llamamos “problemas”.
4. Con suerte, en una secuencia PARA la RP se proponen problemas de aplicación interesantes.

Nada más sencillo que tomar un libro de texto para comprobar esa secuencia.

La raíz cuadrada de la varianza se llama **desviación típica.**

El próximo curso manejarás estos parámetros con soltura. Ahora nos conformamos con hallar sus valores para los datos del ejemplo:

Varianza =

$$= \frac{6^2 + 3^2 + 1^2 + 4^2 + 6^2}{6} = 16{,}33$$

Desviación típica =

$$= \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{16{,}33} = 4{,}04$$

Enseñanza “a través de la RP” vs “para la RP”

En un proceso de enseñanza **a través** de la resolución de problemas: sigue una secuencia similar a la siguiente:

1. El alumnado se enfrenta a situaciones problemáticas sin haber recibido instrucción previa sobre los contenidos que quieren enseñarse.
2. Los problemas deben promover la reflexión y la indagación hacia la búsqueda de estrategias que permitan resolverlos.
3. El profesorado utiliza las respuestas del alumnado para organizar una puesta en común que permita introducir los nuevos conceptos.
4. Por último, el alumnado resuelve problemas para afianzar los nuevos contenidos.

Beltrán-Pellicer, P., & Martínez-Juste, S. (2021). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma*, *98*, 11-21.

Dominio socioafectivo

Debate similar al anterior

Dominio afectivo

RD Enseñanzas Mínimas (tercer ciclo EP)

Competencia específica 7

- 7.1 Reconocer las emociones básicas propias al abordar retos matemáticos, pidiendo ayuda solo cuando sea necesario.
- 7.2 Expresar actitudes positivas ante retos matemáticos, valorando el error como una oportunidad de aprendizaje.

Tercer ciclo
7.1. Autorregular las emociones propias y reconocer algunas fortalezas y debilidades, desarrollando así la autoconfianza al abordar nuevos retos matemáticos. 7.2. Expresar actitudes positivas ante nuevos retos matemáticos tales como la perseverancia y la responsabilidad valorando el error como una oportunidad de aprendizaje.

Trabajo colaborativo

RD Enseñanzas Mínimas (tercer ciclo EP)

Competencia específica 8

- 8.1 Participar respetuosamente en el trabajo en equipo, estableciendo relaciones saludables basadas en el respeto, la igualdad y la resolución pacífica de conflictos.
- 8.2 Aceptar la tarea y rol asignado en el trabajo en equipo, cumpliendo con las responsabilidades individuales y contribuyendo a la consecución de los objetivos del grupo.

Tercer ciclo
8.1. Colaborar activa, respetuosa y responsablemente en el trabajo en equipo mostrando iniciativa, comunicándose de forma efectiva, valorando la diversidad, mostrando empatía y estableciendo relaciones saludables basadas en la tolerancia, la igualdad y la resolución pacífica de conflictos. 8.2. Aceptar la tarea propuesta e implicarse en la exploración compartida de la situación o resolución del problema, respetando los argumentos de otros, poniéndolos a prueba, participando de la construcción del conocimiento y contribuyendo a las discusiones y puestas en común

Collaborative Learning in Mathematics Education

Paula Lahann and Diana V. Lambdin School of Education, Indiana University, Bloomington, IN, USA

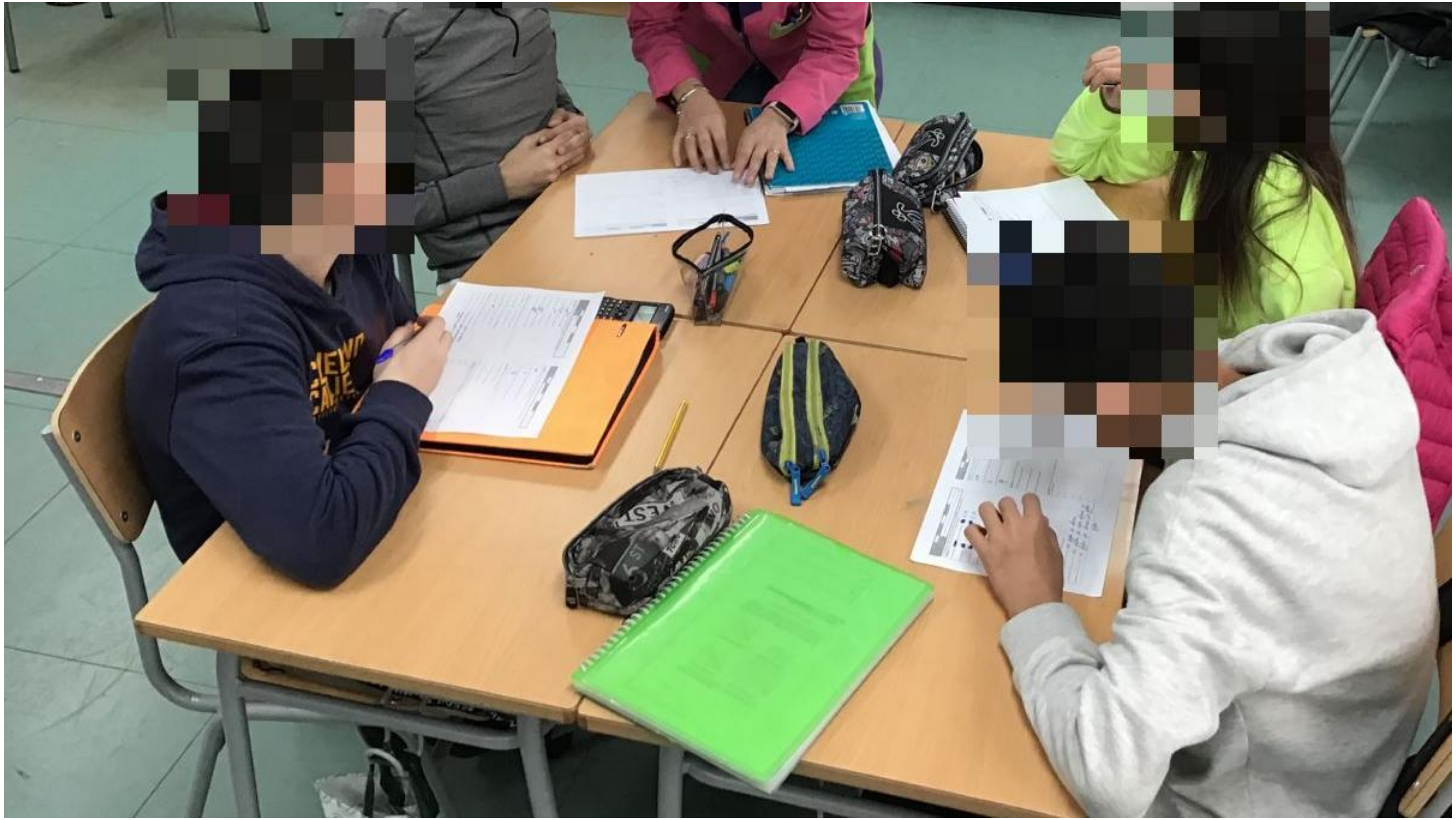
El aprendizaje colaborativo (AC) implica un equipo de estudiantes que aprenden trabajando juntos para compartir ideas, resolver un problema o alcanzar un objetivo común. En la educación matemática, la popularidad del AC aumentó en la década de 1980, pero desde entonces ha seguido evolucionando (Artzt y Newman, 1997; Davidson, 1990).

Los términos aprendizaje colaborativo y aprendizaje cooperativo suelen usarse indistintamente, aunque algunos sostienen que el primero otorga a los estudiantes una autonomía considerable (más apropiado para estudiantes mayores), mientras que el segundo está más claramente dirigido por el profesor (adecuado para todas las edades) (Panitz, 1999).

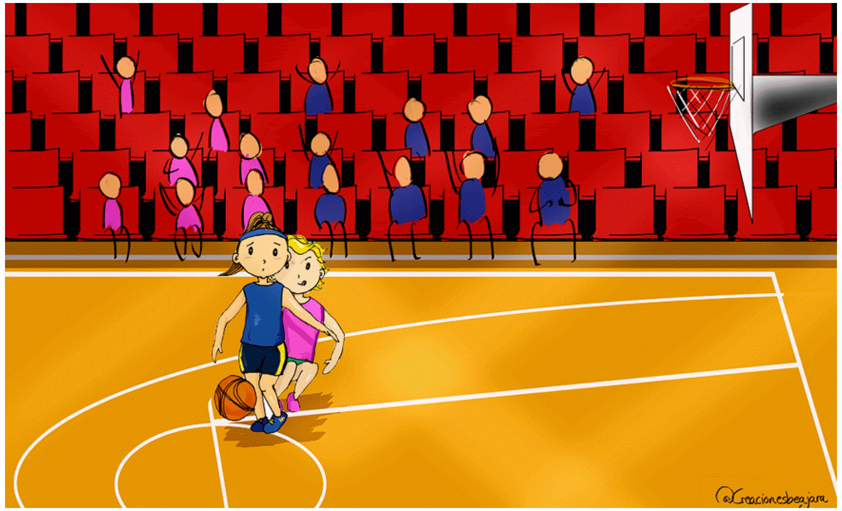
Tres dimensiones parecen definir el aprendizaje colaborativo (AC) y ayudan a distinguir entre sus muchos modelos diferentes:

- La estructura del entorno de AC (incluyendo evaluaciones y recompensas).
- Los roles del profesor y de los estudiantes.
- Los tipos de tareas.

Organización de aula y codocencia



Un partido de basket



Queda un minuto y el entrenador tiene que decidir a qué jugadora sacar. ¿A quién elegirá?

a. Si va perdiendo de 8 puntos.
b. Si va ganando de 2 puntos.

https://twitter.com/pbeltranp/status/1191034286423650304

Guías Praxis para el profesorado de ESO

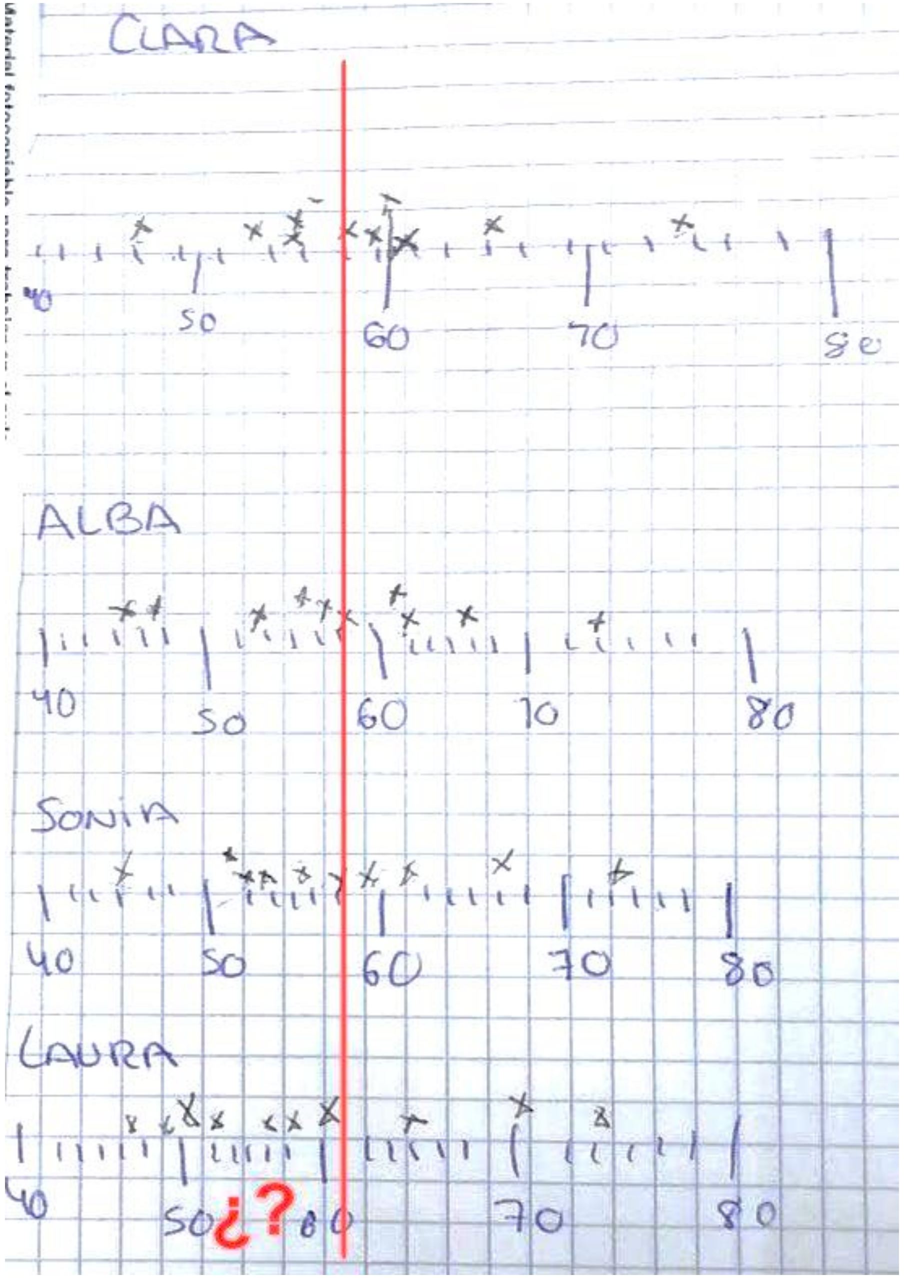
MATEMÁTICAS

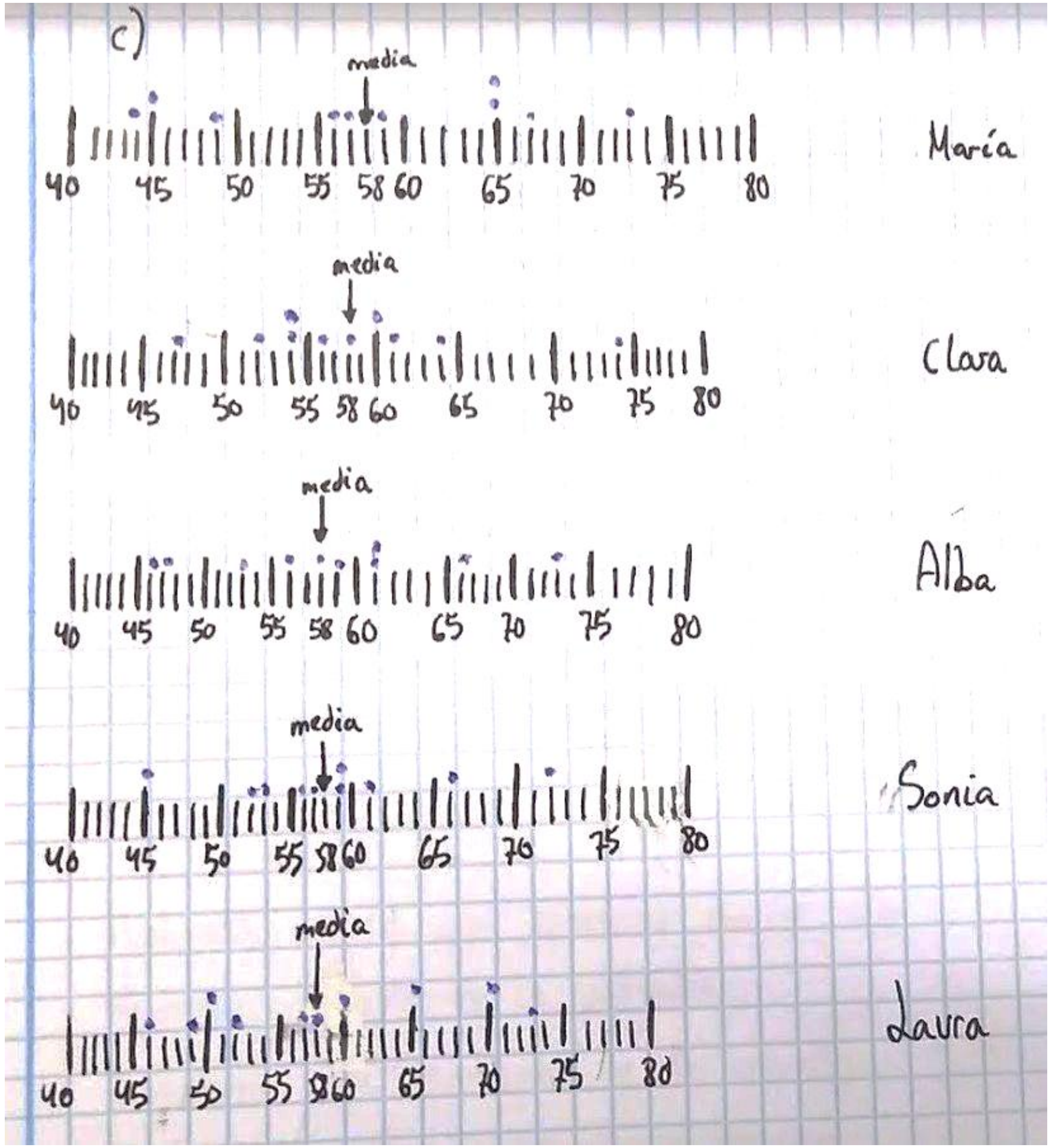
Contenidos, Actividades y Recursos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
María	56	57	67	49	45	73	65	59	65	44
Clara	61	54	56	64	58	47	52	74	60	54
Alba	66	46	61	59	73	47	56	53	61	58
Sonia	57	53	66	59	56	52	59	61	45	72
Laura	49	70	57	65	52	46	60	58	73	50

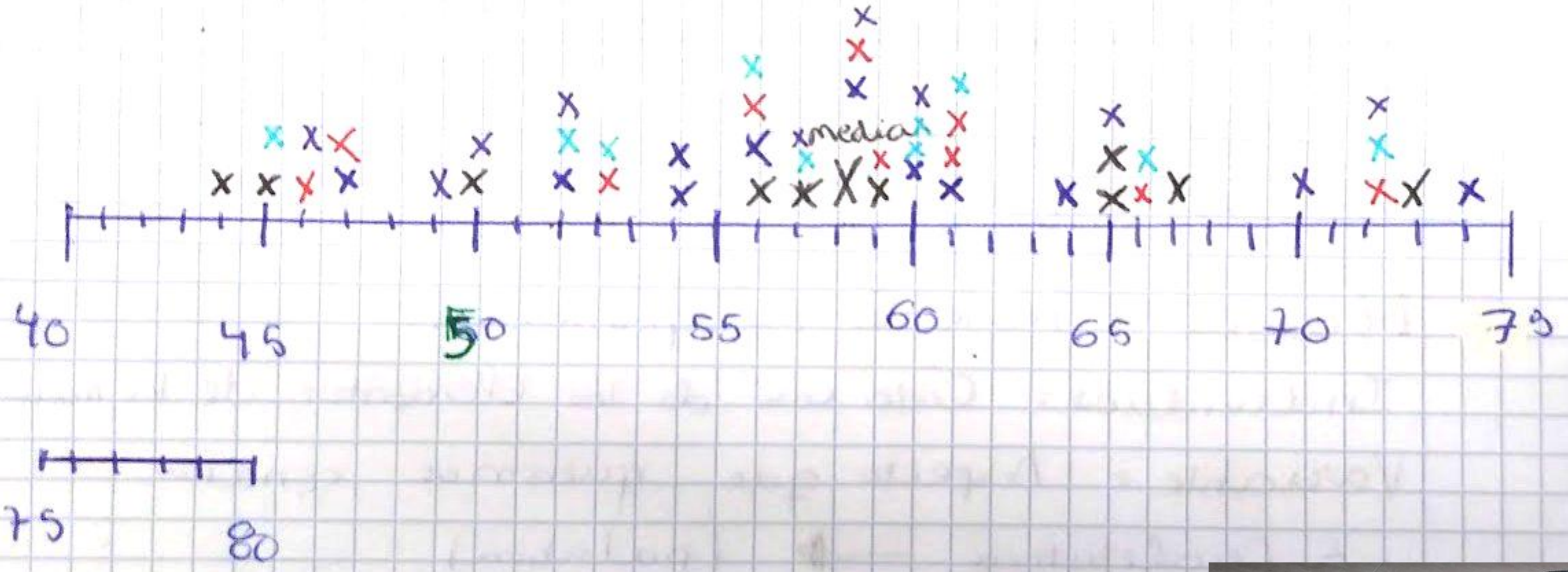
BORRELL, F., POL, A. y SAGUER, E. (1998), «Estadística y probabilidad», en C. Azcárate y J. Deulofeu (1998), Matemáticas ESO, Guías Praxis para el profesorado, Praxis Barcelona.

Criterio / Competencia específica	Nivel 1 — Inicial	Nivel 2 — Básico	Nivel 3 — Intermedio	Nivel 4 — Avanzado / Excelente
CE2. Utilizar herramientas matemáticas para organizar, interpretar y representar datos relevantes de una situación, valorando su utilidad para responder a preguntas del contexto.	No comprende el contexto ni identifica los datos relevantes del problema.	Reconoce parcialmente los datos y los usa con errores o de manera desorganizada.	Organiza y utiliza los datos de forma adecuada, con alguna imprecisión menor.	Organiza, representa y usa los datos de forma precisa, clara y coherente, mostrando comprensión profunda de la situación.
CE3. Seleccionar y aplicar procedimientos de cálculo (media, mediana, rango, desviación, etc.) adecuados a la naturaleza de los datos y al contexto.	No aplica correctamente las medidas o las calcula de manera errónea.	Calcula algunas medidas, aunque con errores o sin justificar su elección.	Calcula correctamente las medidas adecuadas y las relaciona con la situación.	Calcula, selecciona y justifica con precisión las medidas más pertinentes para el contexto.
CE4. Analizar y valorar la variabilidad e incertidumbre en contextos reales, argumentando decisiones a partir de datos y medidas estadísticas.	Da respuestas sin justificar o sin relación con los datos.	Justifica parcialmente su elección con argumentos poco sólidos.	Justifica su decisión de forma razonada y apoyada en medidas estadísticas.	Argumenta su decisión con profundidad, valorando la variabilidad y el riesgo de cada jugadora en relación con el contexto (ir perdiendo o ganando).
CE5. Comunicar y expresar ideas matemáticas de forma clara, utilizando el lenguaje, los símbolos y las representaciones apropiadas.	Expresa sus ideas de forma confusa, sin lenguaje matemático.	Explica sus ideas con cierta claridad, pero sin precisión o rigor.	Comunica de manera ordenada, utilizando correctamente parte del lenguaje matemático.	Comunica con claridad, precisión y coherencia, empleando correctamente el lenguaje y la notación matemática.

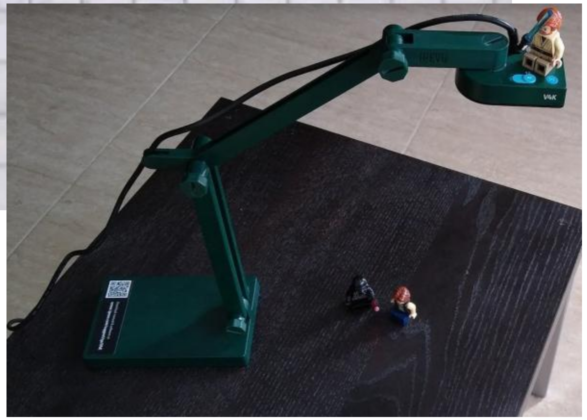

CLARA
40
50
60
70
80
ALBA
40
50
60
70
80
SONIA
40
50
60
70
80
LAURA
40
50
¿?
60
70
80

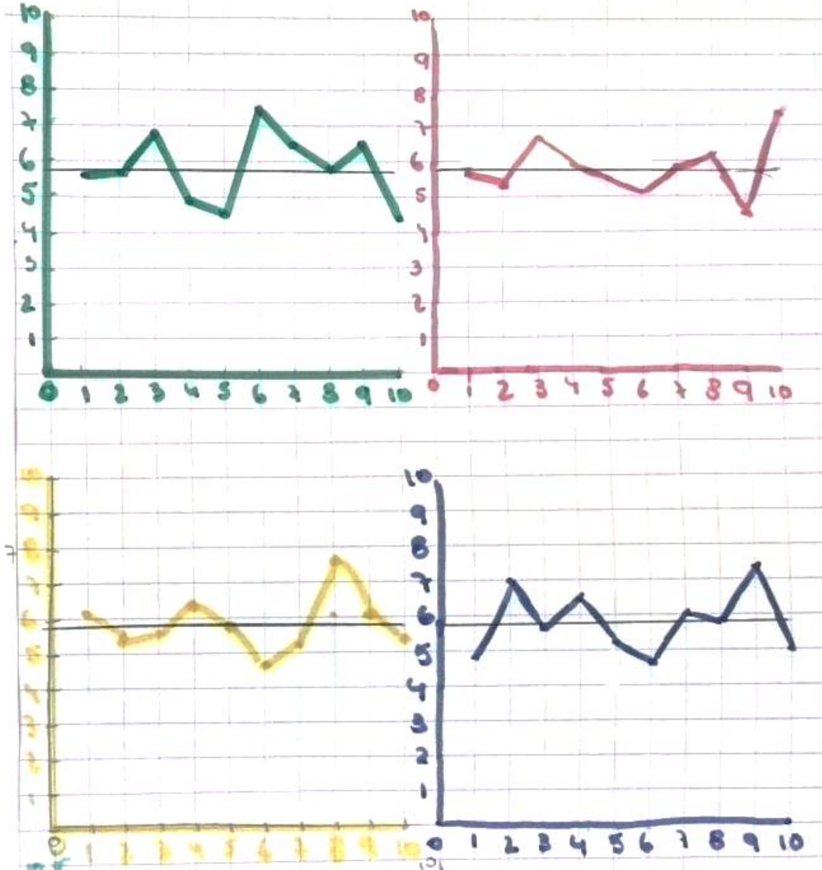

c)
media
40 45 50 55 58 60 65 70 75 80
María
media
40 45 50 55 58 60 65 70 75 80
Clara
media
40 45 50 55 58 60 65 70 75 80
Alba
media
40 45 50 55 58 60 65 70 75 80
Sonia
media
40 45 50 55 58 60 65 70 75 80
Laura

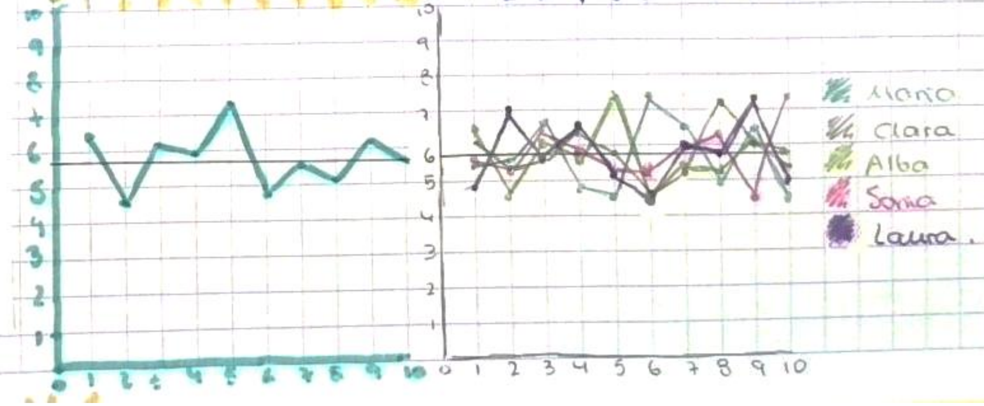
c)



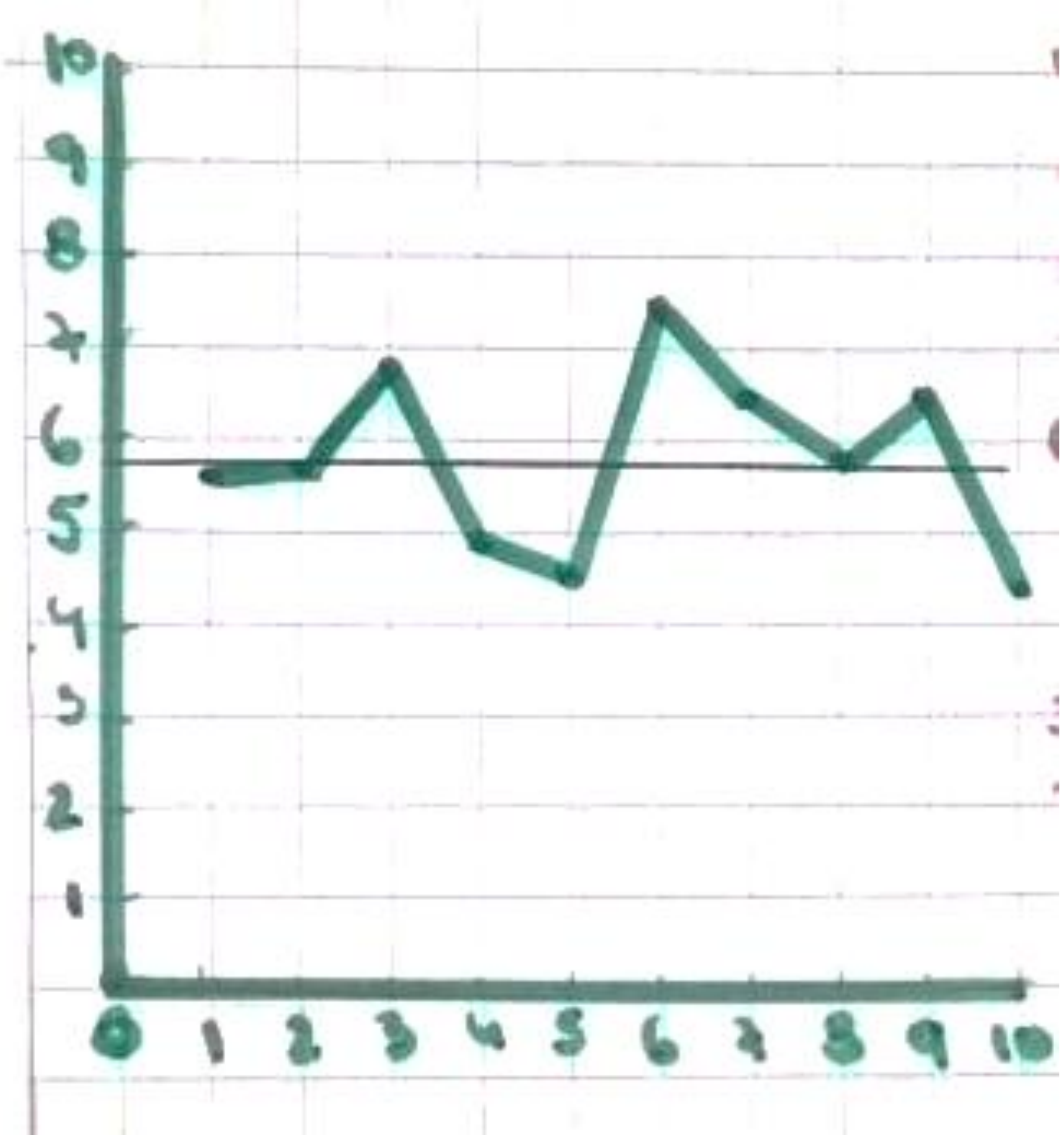
María Clara Alba Sonia Laura







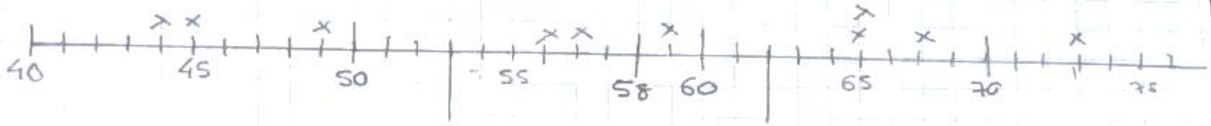
Las más regulares son Sonia, Clara y Laura.
porque son las que están más "controladas", más
pegadas a la línea media.



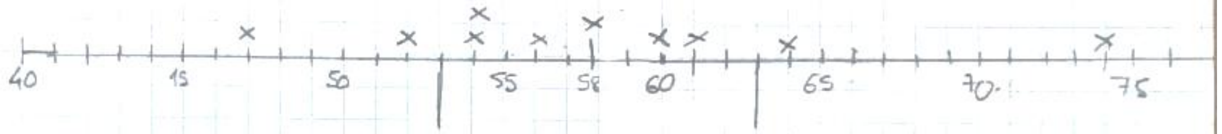
- La forma de representar gráficamente los datos, distinta completamente a la sugerida mediante un diagrama de puntos.
- La forma de codificar el eje de ordenadas. Son datos de % de acierto. Lo reduce a una escala de 0 a 10.
- Poner la media en cada gráfica.

c).

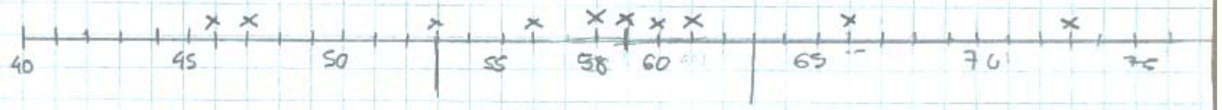
María



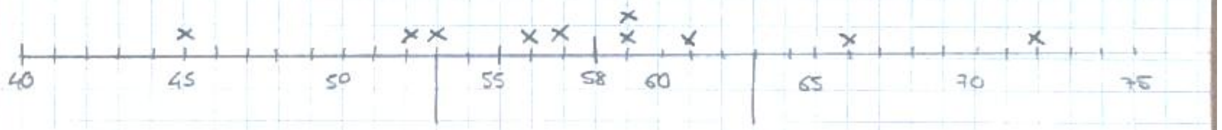
Clara



Alba



Sonia

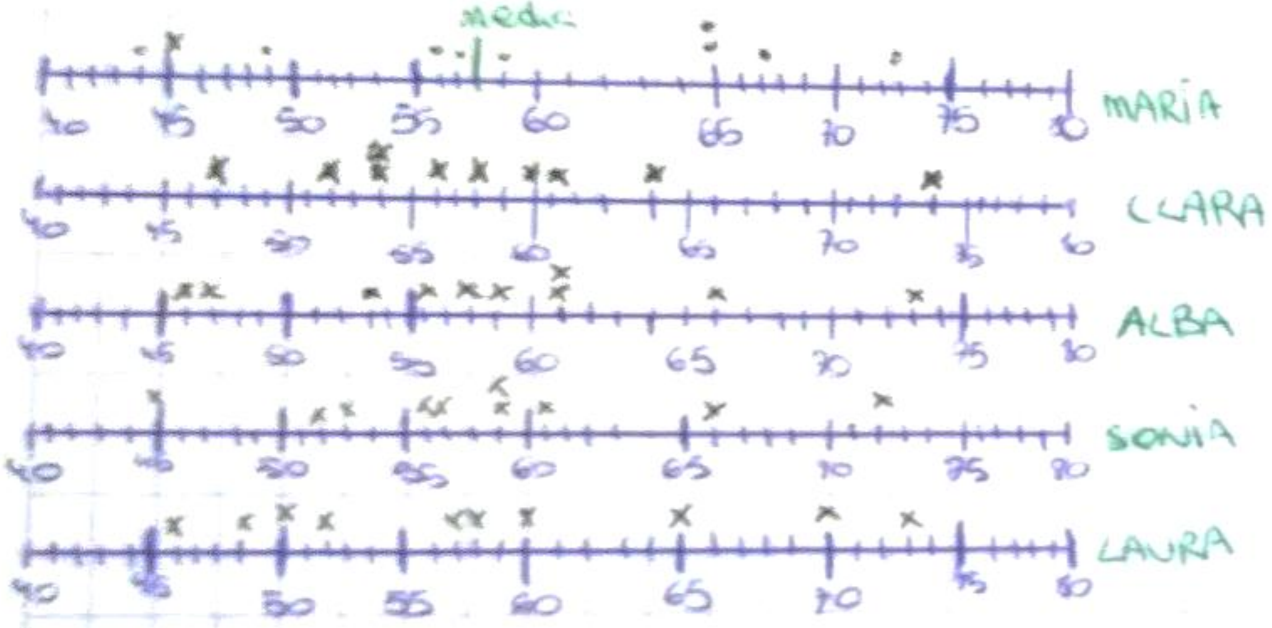


Laura

La más regular es ______ porque si desde la media (58) damos una distancia arriba y abajo por ejemplo 6 tiene más cruces

Laura

La más regular es ______ porque si desde la media (58) damos una distancia arriba y abajo por ejemplo 6 tiene más cruces



rango = 29

rango = 27

rango = 27

rango = 27

rango = 27

clara

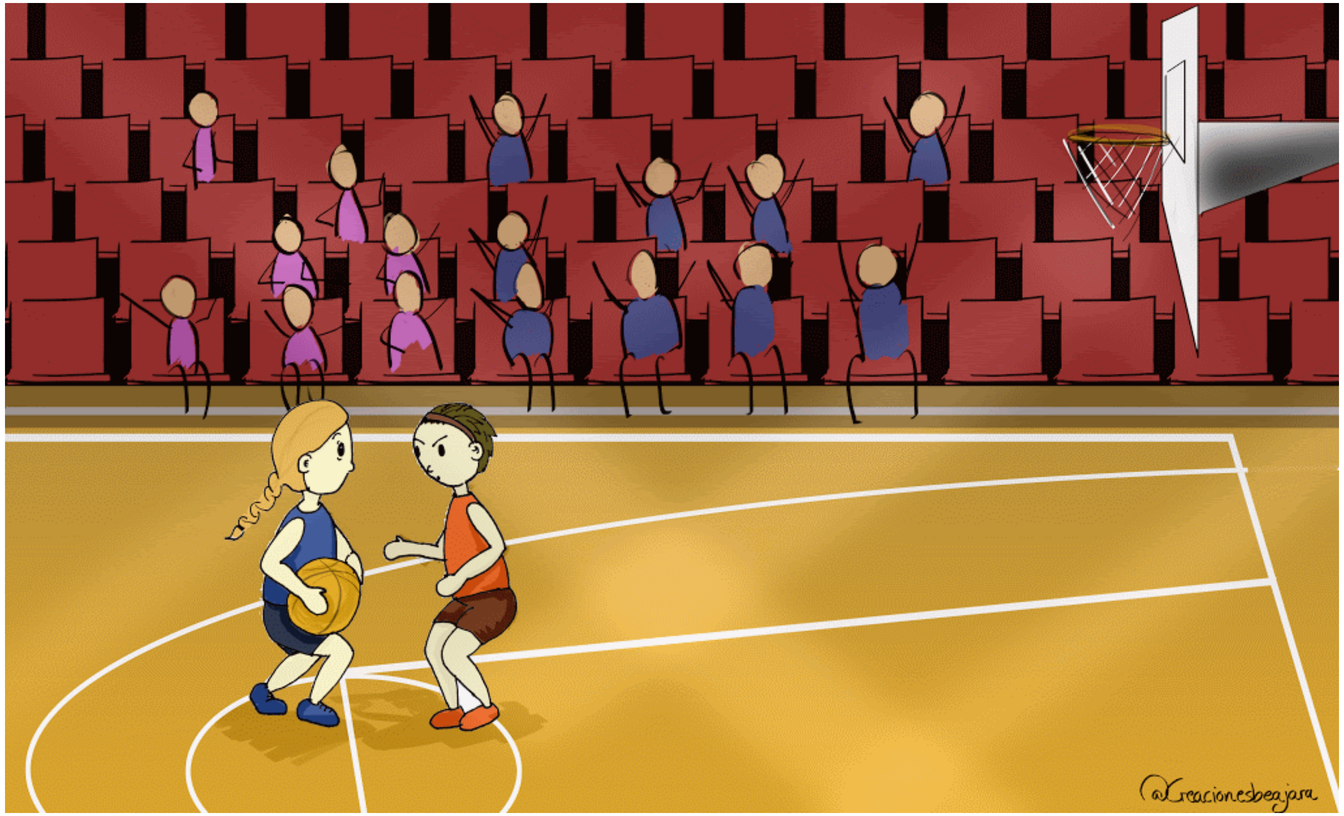
d) ~~Sonia~~ es la jugadora más regular, porque tiene más aciertos en sus resultados.

8) RANGO $\underset{MAX}{75\%} - \underset{MIN}{31\%} = 44\%$

Las preguntas no están elegidas al azar

Ahora consideramos el caso de una jugadora, Berta, que ha estado lesionada durante 2 partidos. Durante los otros 8 partidos ha acumulado una cantidad de dispersión de 67.

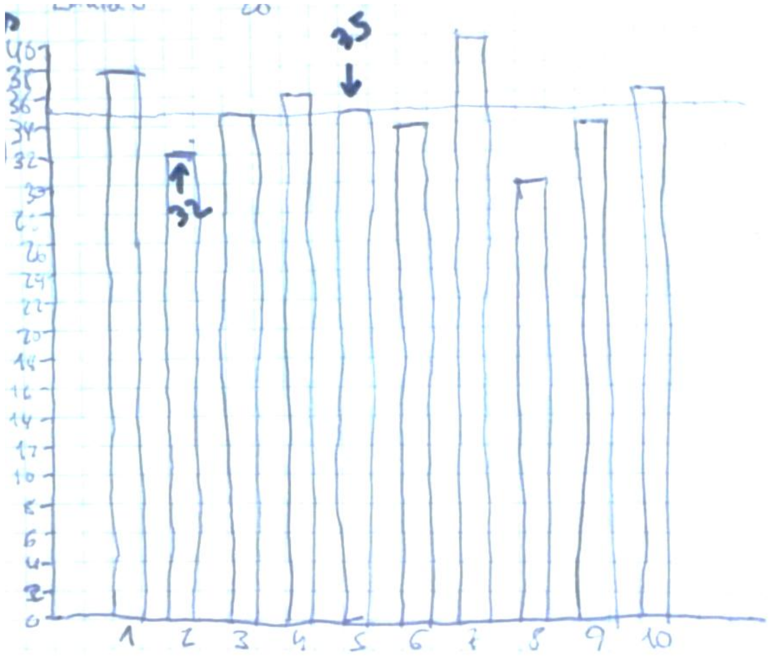
¿Es más regular que María?



Exploramos las desviaciones respecto a la media

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	MEDIA
María	56	57	67	49	45	73	65	59	65	44	**58**
Diferencias respecto a la media											

La etiqueta de una caja de tornillos indica que el número medio de tornillos por caja es 35. Representa una gráfica de una posible distribución del número de cerillas en 10 cajas.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	MEDIA	Desviación media
María	56	57	67	49	45	73	65	59	65	44	**58**	**7,8**
Diferencias respecto a la media	-2	-1	9	-9	-13	15	7	1	7	-14	**0**	
Clara	61	54	56	64	58	47	52	74	60	54	**58**	**5,4**
Diferencias respecto a la media	3	-4	-2	6	0	-11	-6	16	2	-4	**0**	
Alba	66	46	61	59	73	47	56	53	61	58	**58**	**6**
Diferencias respecto a la media	8	-12	3	1	15	-11	-2	-5	3	0	**0**	
Sonia	57	53	66	59	56	52	59	61	45	72	**58**	**5,4**
Diferencias respecto a la media	-1	-5	8	1	-2	-6	1	3	-13	14	**0**	
Laura	49	70	57	65	52	46	60	58	73	50	**58**	**7,2**
Diferencias respecto a la media	-9	12	-1	7	-6	-12	2	0	15	-8	**0**	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	MEDIA	Desviación media	Varianza
María	56	57	67	49	45	73	65	59	65	44	**58**	**7,8**	**85,6**
Diferencias respecto a la media	-2	-1	9	-9	-13	15	7	1	7	-14	**0**		
Clara	61	54	56	64	58	47	52	74	60	54	**58**	**5,4**	**49,8**
Diferencias respecto a la media	3	-4	-2	6	0	-11	-6	16	2	-4	**0**		
Alba	66	46	61	59	73	47	56	53	61	58	**58**	**6**	**60,2**
Diferencias respecto a la media	8	-12	3	1	15	-11	-2	-5	3	0	**0**		
Sonia	57	53	66	59	56	52	59	61	45	72	**58**	**5,4**	**50,6**
Diferencias respecto a la media	-1	-5	8	1	-2	-6	1	3	-13	14	**0**		
Laura	49	70	57	65	52	46	60	58	73	50	**58**	**7,2**	**74,8**
Diferencias respecto a la media	-9	12	-1	7	-6	-12	2	0	15	-8	**0**		

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	MEDIA	Desviación media	Varianza	Desviación típica
María	56	57	67	49	45	73	65	59	65	44	**58**	**7,8**	**85,6**	**9,25**
Diferencias respecto a la media	-2	-1	9	-9	-13	15	7	1	7	-14	**0**			
Clara	61	54	56	64	58	47	52	74	60	54	**58**	**5,4**	**49,8**	**7,06**
Diferencias respecto a la media	3	-4	-2	6	0	-11	-6	16	2	-4	**0**			
Alba	66	46	61	59	73	47	56	53	61	58	**58**	**6**	**60,2**	**7,76**
Diferencias respecto a la media	8	-12	3	1	15	-11	-2	-5	3	0	**0**			
Sonia	57	53	66	59	56	52	59	61	45	72	**58**	**5,4**	**50,6**	**7,11**
Diferencias respecto a la media	-1	-5	8	1	-2	-6	1	3	-13	14	**0**			
Laura	49	70	57	65	52	46	60	58	73	50	**58**	**7,2**	**74,8**	**8,65**
Diferencias respecto a la media	-9	12	-1	7	-6	-12	2	0	15	-8	**0**			

¿Y si hago rúbricas de un solo punto?

	Emplea representaciones adecuadas y explica cómo las emplea para resolver un problema	

¿Qué es eso de ser competente?

Torrezno de Soria

MARCA DE GARANTÍA

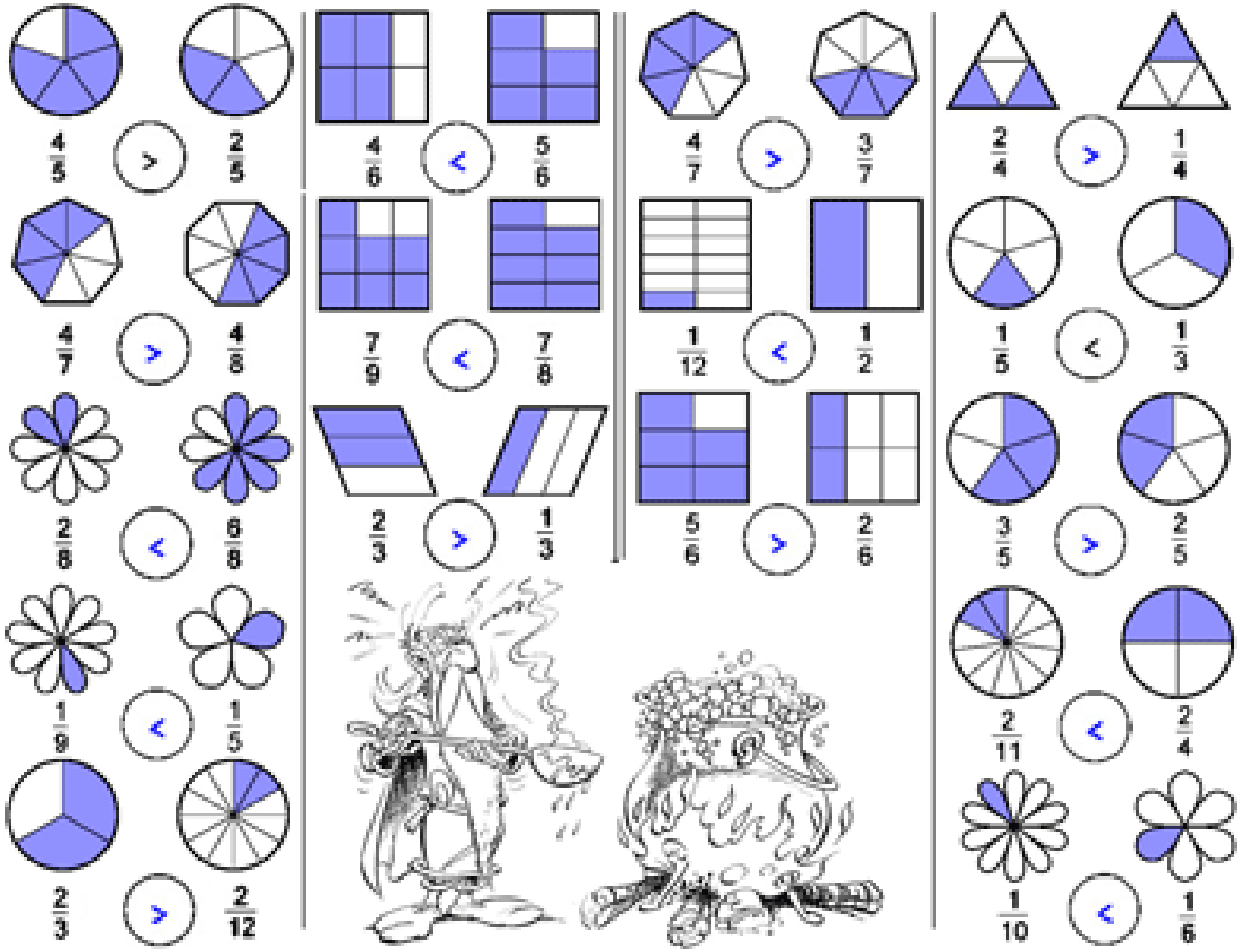
Tipos de variables estadísticas

La calificación es una variable…

- Cualitativas
  - Nominales
  - Ordinales
- Cuantitativas
  - Discretas
  - Continuas


YO CALIFICANDO
MEDIANA
MEDIA
imgflip.com

¿Qué es ser competente en “fracciones”?



¿Qué es ser competente en “fracciones”?

Construye la unidad de medida con la que se ha medido el área del siguiente mantel:

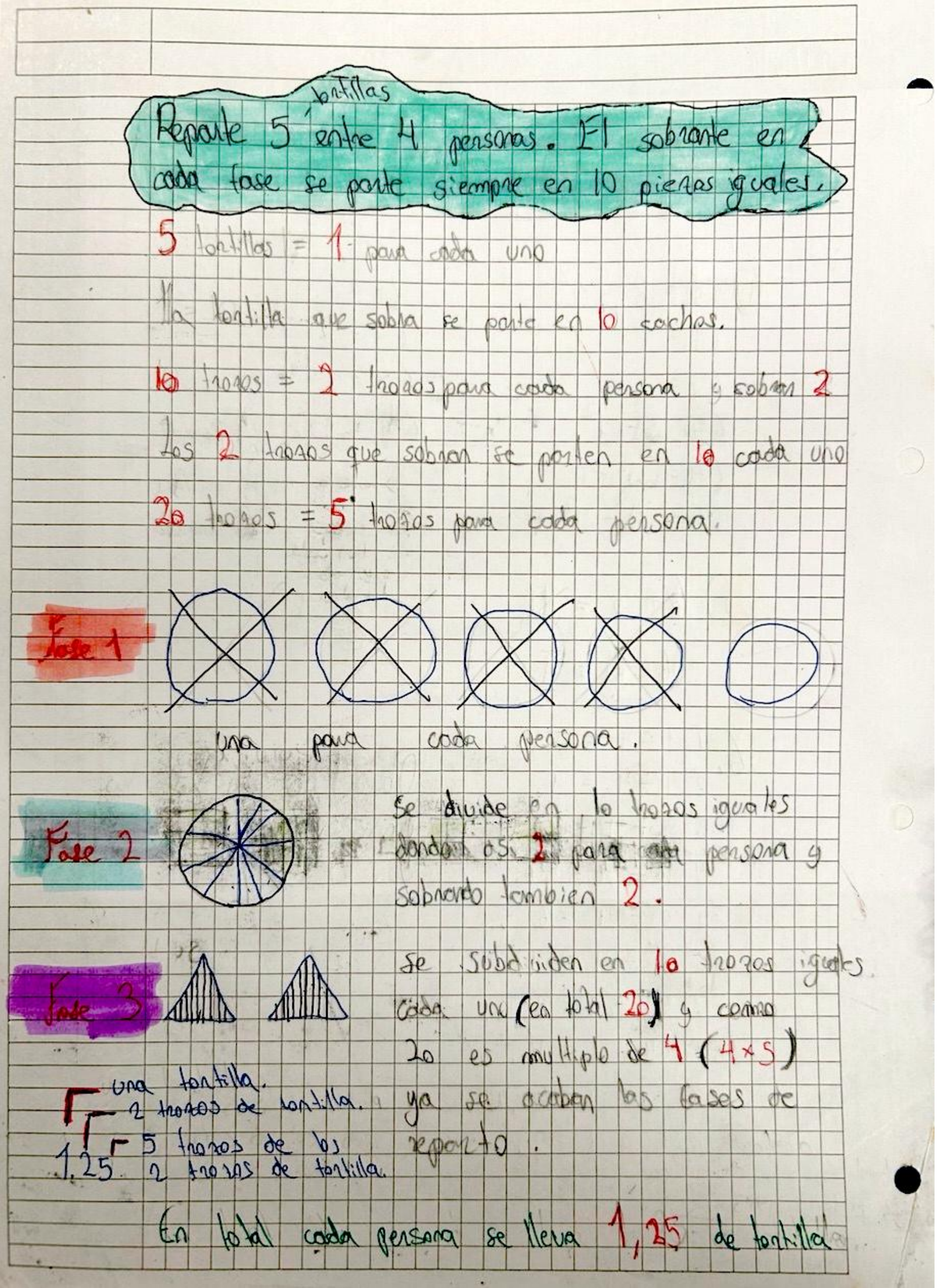
El mantel mide 8/3 u

¿Qué es ser competente en “fracciones”?

Queremos diseñar una actividad de aula para trabajar la magnitud longitud y para dar sentido a la resta de fracciones desde el modelo de medida empleando esa magnitud.

a) Elige justificadamente qué objetos podrías llevar al aula.
b) Explica cómo los objetos elegidos permiten dar sentido a la resta de fracciones desde el modelo de medida.
c) Enuncia un problema que podrías plantear al alumnado utilizando los objetos elegidos.
d) Describe las acciones concretas que esperas que realice el niño o niña utilizando el material para resolver el problema del apartado c)
e) Describe cómo podría resolver el niño o la niña el problema anterior de forma gráfica. Explica los dibujos realizados y cómo estos justifican un algoritmo de la resta de fracciones.


Fracciones propias
Fracciones impropias, algoritmos, propiedades del racional, RP, etc.
Parte-todo
Parte-todo
imgflip.com


Reparte 5 tortillas entre 4 personas. El sobrante en cada fase se parte siempre en 10 piezas iguales.

5 tortillas = 1 para cada uno

La tortilla que sobra se parte en 10 cachos.

10 trozos = 2 trozos para cada persona y sobran 2

Los 2 trozos que sobran se parten en 10 cada uno

20 trozos = 5 trozos para cada persona

Fase 1

una para cada persona.

Fase 2

Se divide en 10 trozos iguales dando así 2 para cada persona y sobrando también 2.

Fase 3

Se subdividen en 10 trozos iguales cada uno (en total 20) y como 20 es multiplo de 4 (4×5) ya se acaban las fases de reparto.

una tortilla.

2 trozos de tortilla.

5 trozos de los 2 trozos de tortilla.

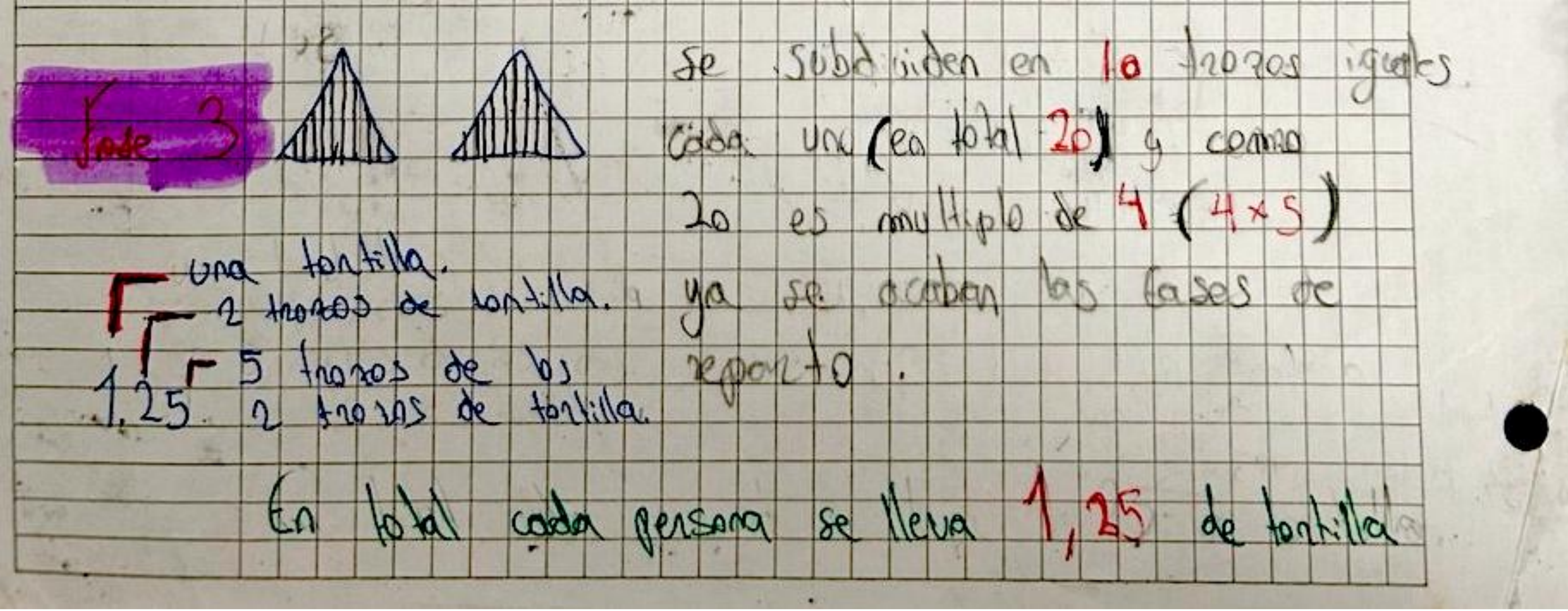
1,25

En total cada persona se lleva 1,25 de tortilla

La imagen muestra la solución de un alumno de 6º de Educación Primaria al problema:

Reparte 5 tortillas entre 4 personas. El sobrante de cada fase se parte siempre en 10 piezas iguales.

¿Cuál es el objetivo didáctico al exigir que se parta siempre en 10 piezas iguales?



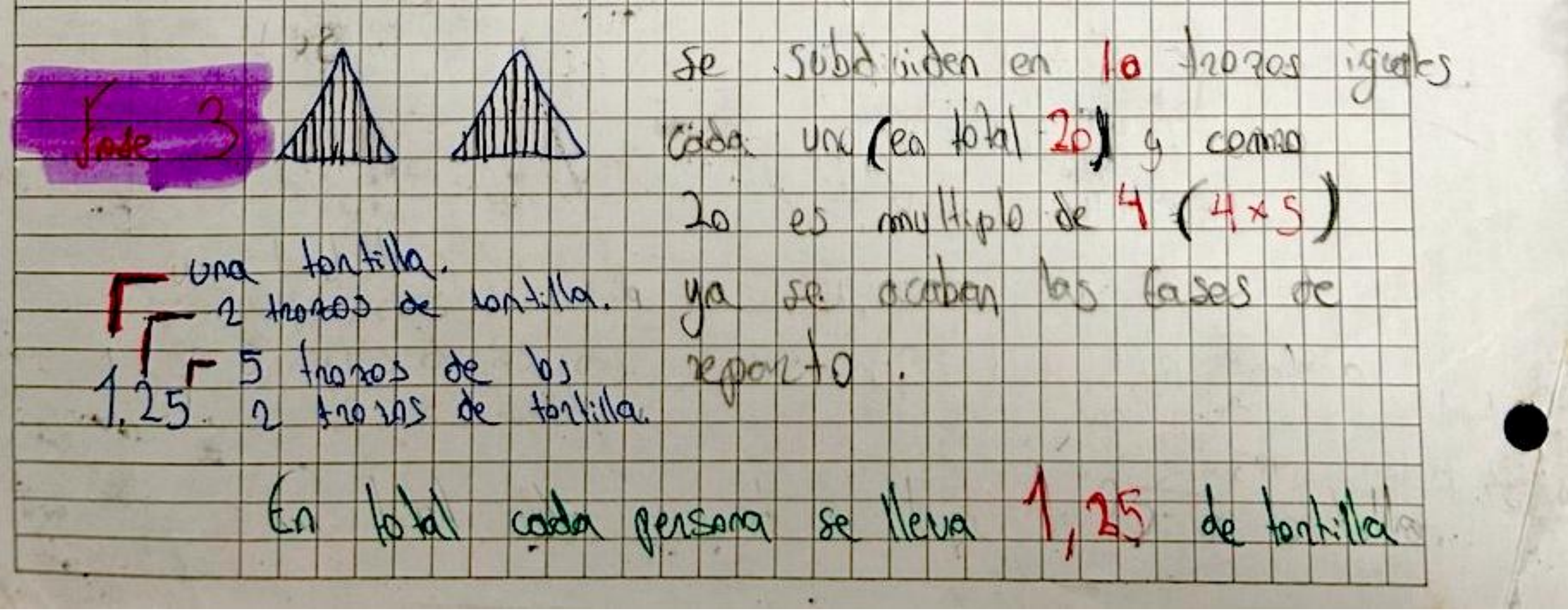
Fase 3

Se subdividen en 10 trozos iguales cada una (en total 20) y como 20 es multiplo de 4 (4 × 5) ya se acaban las fases de reparto.

una tortilla.
2 trozos de tortilla.
5 trozos de las
1,25 2 trozos de tortilla.

En total cada persona se lleva 1,25 de tortilla

¿Son adecuadas las representaciones gráficas de la fase 3?



¿Son adecuados los significados que construye el estudiante para las cifras de la representación decimal obtenida como resultado del reparto?

Consolidación

Práctica rica, o como señala Cecilia Calvo y David Barba, práctica productiva (por favor) vs práctica reproductiva

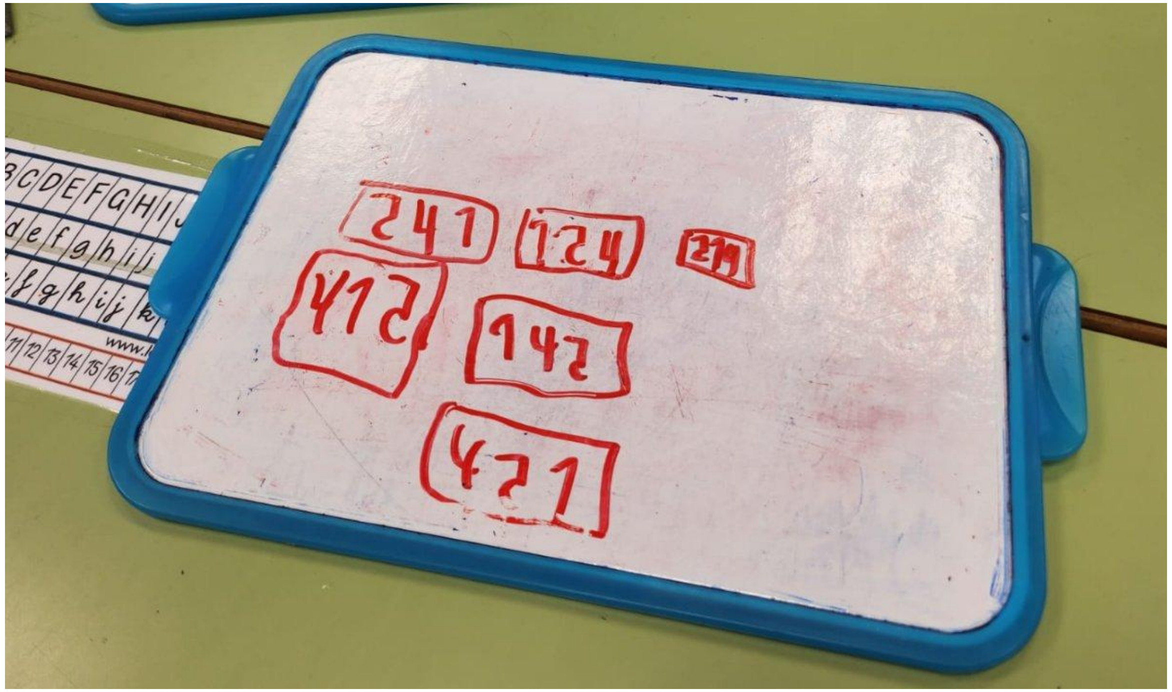
El Rey de las Hadas te invita a sentarte frente a él:

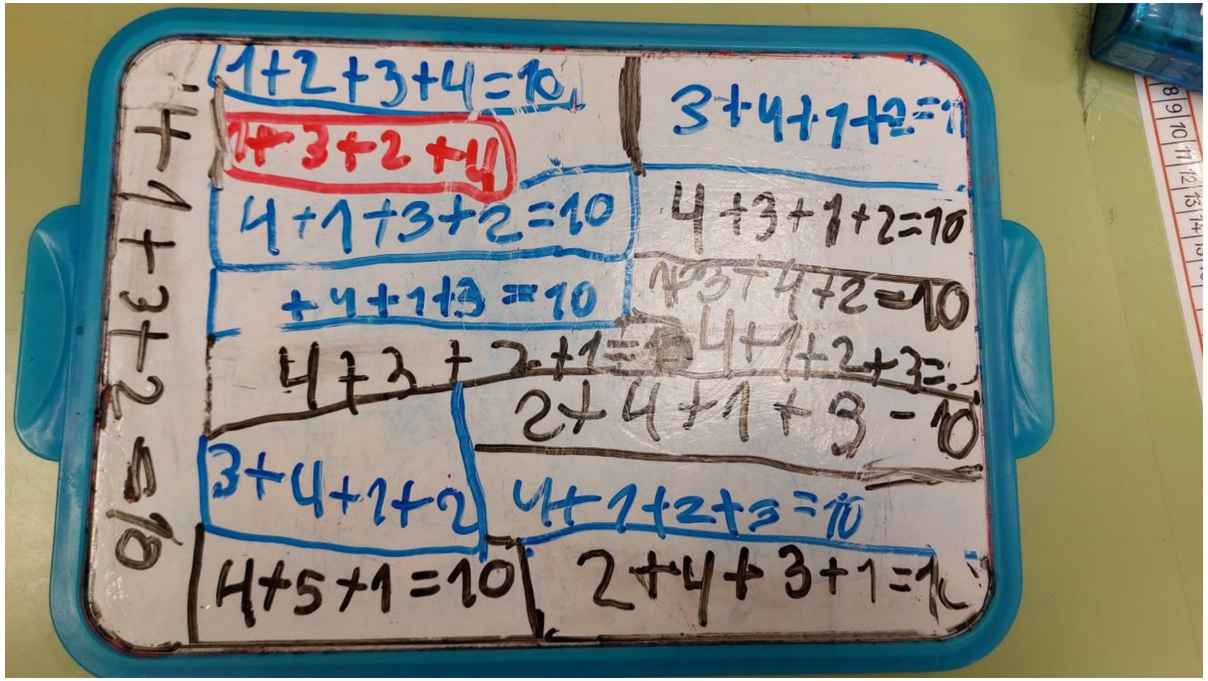
- *Diseña, para mí, un castillo con hermosas torres.*

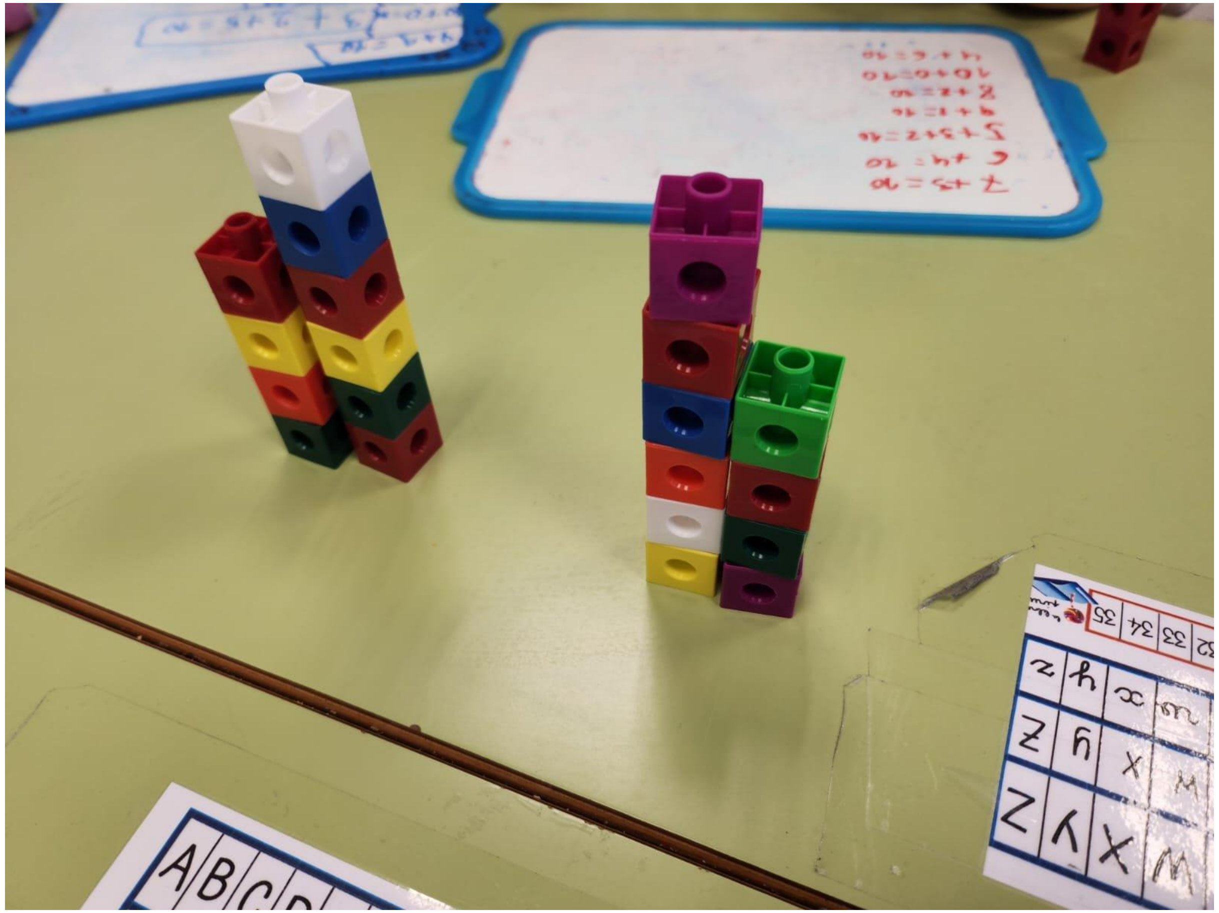
El rey tiene suficiente dinero para pagar por diez pisos y te dice que distribuyas estos diez pisos como quieras entre tus torres. Sin embargo, susurra:

- *¡Ninguna de las torres puede tener la misma altura!*

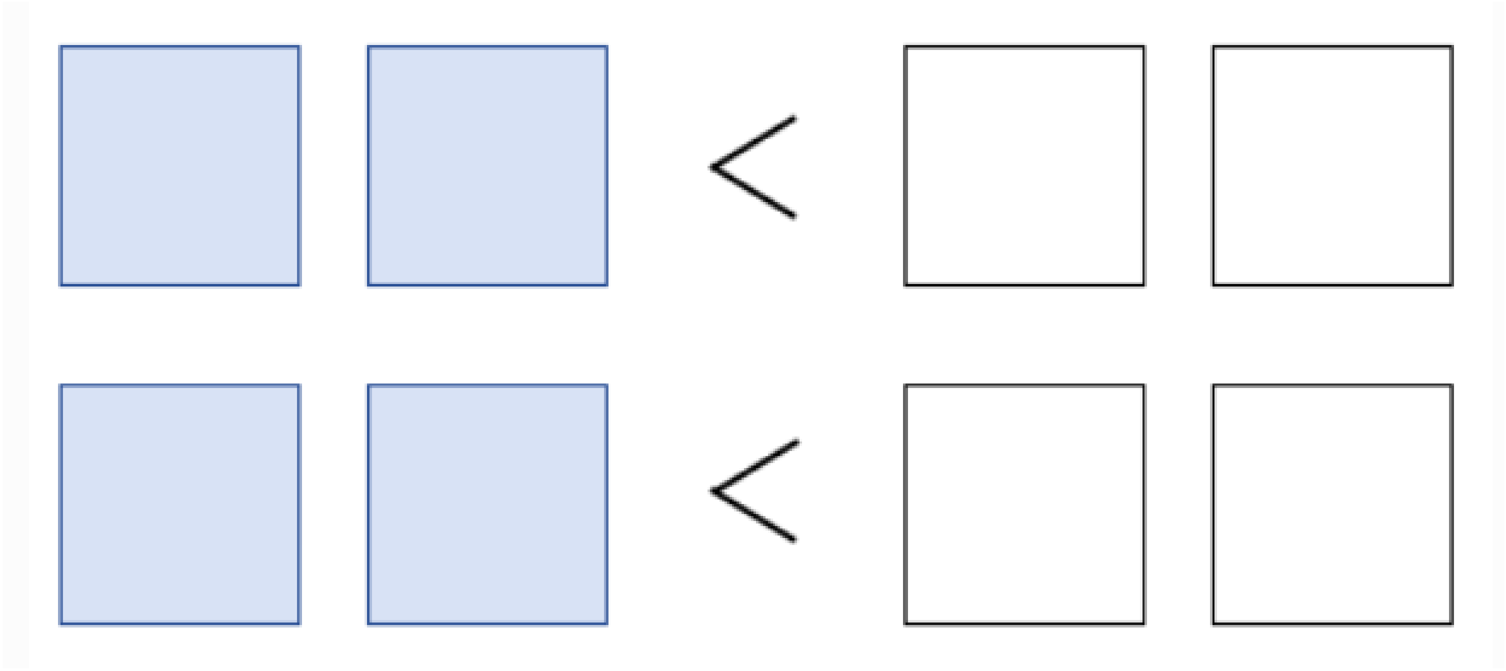
Por ejemplo, podrías construir tres torres de altura 4, 5, 1 pero no podrías construir cuatro torres de alturas 1, 3, 5, 1 porque dos torres tienen una altura de 1.


241
124
412
142
421


1+2+3+4=10
4+1+3+2=10
4+3+1+2=10
3+4+1+2
4+5+1=10



Less is more



https://nrich.maths.org/problems/less-more

Ordena en orden de dificultad

a. 42 + 47
b. 42 + 18
c. 42 + 39
d. 42 + 3

https://nrich.maths.org/problems/arranging-additions-and-sorting-subtractions

Gestión de los momentos de institucionalización en el aula

Cinco actuaciones clave

En un enfoque a través de la resolución de problemas, los *momentos de institucionalización* son posteriores a la realización por parte de los estudiantes de unas tareas o problemas que realizan los estudiantes.

En dichos momentos, la gestión de las discusiones e interacciones en el aula para la construcción del discurso matemático es una labor clave del profesor/a.

Presentamos ***cinco actuaciones clave*** para gestionar las intervenciones en el aula de matemáticas y usar las respuestas de los estudiantes para promover la construcción del conocimiento matemático en estos momentos de institucionalización:

Smith, M. & Stein, M. K. (2018). *5 Practices for orchestrating productive mathematics discussion*. NCTM.

1. Anticipar respuestas probables de estudiantes a tareas matemáticas

El profesor debe prever todas las estrategias, correctas o incorrectas, que pueden usarse para resolver la tarea y cómo se relacionan con los contenidos a aprender. Esas estrategias deben reflejarse en una *tabla* o realizar sus pasos en un *diagrama de árbol*, que servirán de ayuda en las siguientes fases.

2. Monitorizar las respuestas reales de los estudiantes a las tareas

Mientras los estudiantes trabajan en parejas o pequeños grupos, el docente puede pasearse por la clase, prestar atención a las diferentes estrategias que se están empleando y apuntarlas en la tabla o en el árbol realizado de la tarea.

También puede resolver dudas concretas en los grupos que así lo requieran o hacer preguntas para hacer manifiesto el pensamiento de los estudiantes, ayudarlos a que lo clarifiquen, asegurarse del compromiso de todos los miembros con la actividad y apremiar a los estudiantes a que tengan en cuenta aspectos de la tarea que requieren atención.

3. Seleccionar a estudiantes particulares para que presenten su trabajo matemático durante la discusión de toda la clase

La elección estará fundamentada en la labor de monitoreo realizada y tendrá en cuenta el contenido matemático de las respuestas para no seleccionar dos estudiantes con respuestas que involucren exactamente el mismo contenido matemático.

4. Secuenciar las respuestas de los estudiantes en un orden específico

Además de la selección, es importante ordenarlos adecuadamente para favorecer la aparición de oportunidades de aprendizaje y lograr sus metas matemáticas para la discusión.

Por ejemplo, puede comenzarse por la estrategia que la mayoría empleó, con el objeto de validar el trabajo efectuado por la mayoría y para hacer accesible el comienzo de la discusión a tantos estudiantes como se pueda. O, si las estrategias pueden jerarquizarse de algún modo, podría ser más interesante comenzar por la más elemental, para acabar con la que incluya contenidos matemáticos más elevados, si éstos corresponden con los objetivos planificados.

5. Conectar las diferentes respuestas de los estudiantes y vincularlas con las ideas matemáticas clave

El profesor puede ayudar a sus estudiantes a reflexionar sobre las consecuencias de la aplicación de distintas estrategias a la gama de problemas que pueden resolverse (por ejemplo, sobre la precisión y la eficiencia para resolverlos), así como a reconocer con mayor facilidad los tipos de modelos matemáticos.

Esta 5ª actuación también se incluye en los *momentos de evaluación*.

Un problema de películas…

Vamos a poner en juego lo anterior

Problema 3

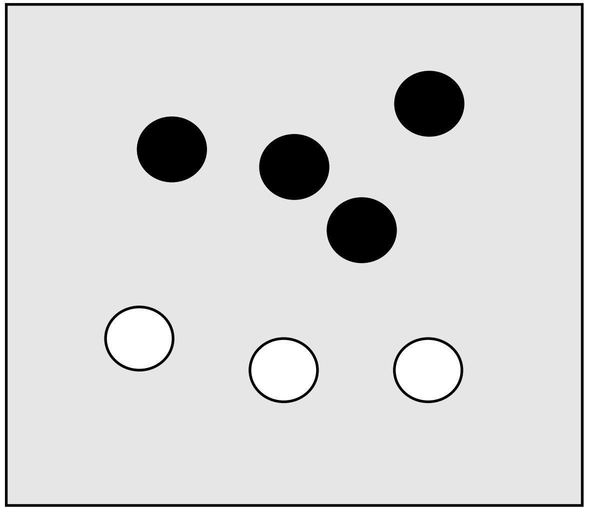
Película al azar

Pilar quiere ver una película en una plataforma de streaming de TV con sus dos amigos Jorge y Julia, pero no saben cuál elegir. A Pilar se le ocurre lo siguiente:

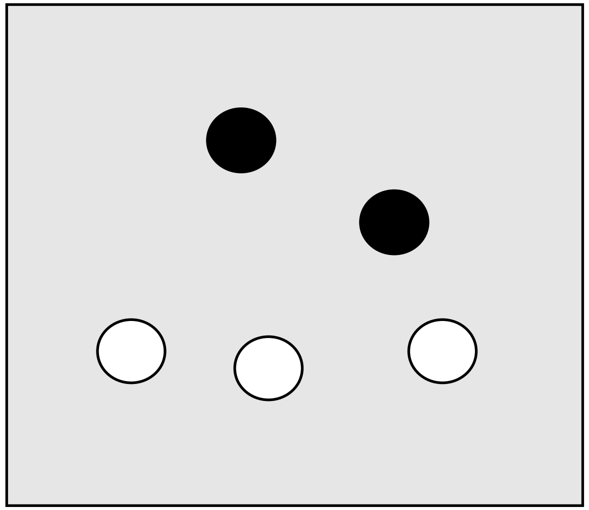
> —Vamos a utilizar el azar para la elección de la película. Para ello introduciremos unas bolas en dos bolsas de la siguiente manera. En la bolsa A introduciremos 3 bolas blancas y 4 negras, mientras que en la bolsa B introduciremos 3 bolas blancas y 2 bolas negras. Una vez introducidas las bolas, Jorge cogerá una bola de la bolsa A y la introducirá en la bolsa B. Finalmente, Julia extraerá una bola de la bolsa B y si la bola es blanca veremos la película "Hero-n" y si es negra veremos la película "Escuela de Rubik"—

Sin embargo, Pilar tiene una duda: con esta forma de elegir la película que van a ver, ¿las dos películas tienen la misma probabilidad de ser elegidas o hay alguna de ellas que tiene más probabilidad?

A



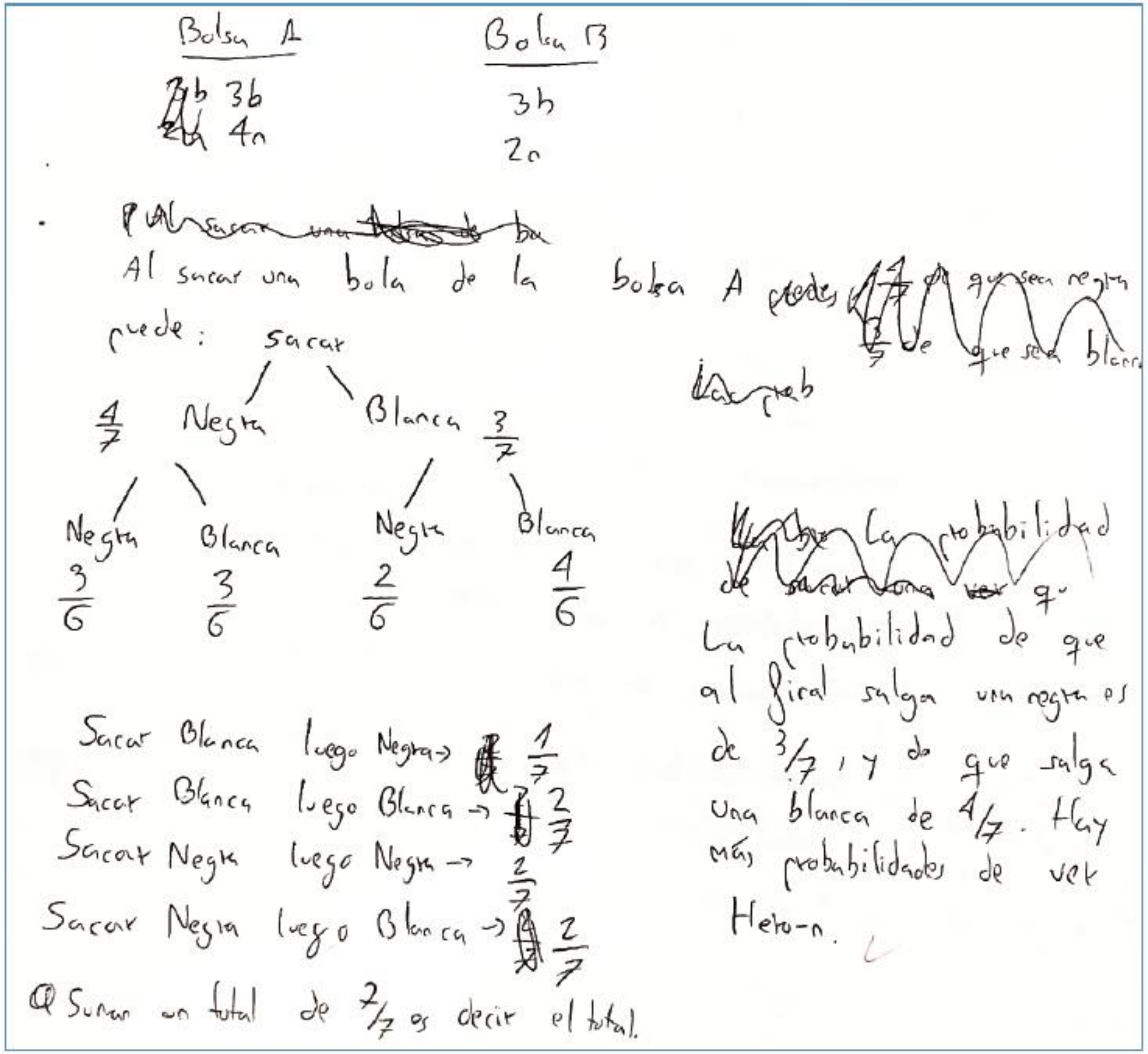
B



Razonamiento verbal

Tiene más probabilidad de salir la blanca ya que en el hipotético caso de que al sacar una bola ~~negra~~ de la Bolsa A fuera negra sí que habría la misma probabilidad de sacar una blanca que una negra en la B. sin embargo Pero también puede ~~al~~ sacar una bola blanca de la A y meterla en la B por tanto en la B habría 4 bolas blancas y 2 negras es decir que habría más probabilidad de que se sacase una blanca. Eso significa que hay más probabilidad de que vean la película "Hero-n" que que vean "Escuela de Rubik"

Probabilidades condicionadas e intersecciones



Bolsa A

3b
4n

Bolsa B

3b
2n

Al sacar una bola de la bolsa A puedes 4/7 de que sea negra, 3/7 de que sea blanca

puede: sacar

4/7 Negra — Blanca 3/7

Negra 3/6 — Blanca 3/6 — Negra 2/6 — Blanca 4/6

Sacar Blanca luego Negra → 1/7

Sacar Blanca luego Blanca → 2/7

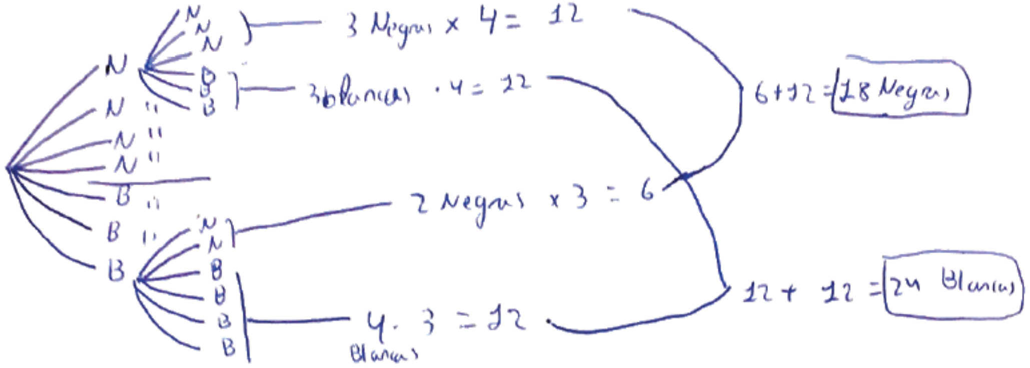
Sacar Negra luego Negra → 2/7

Sacar Negra luego Blanca → 2/7

Suman un total de 7/7 es decir el total.

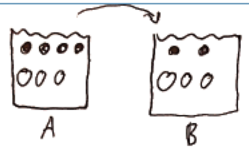
La probabilidad de que al final salga una negra es de 3/7, y de que salga una blanca de 4/7. Hay más probabilidades de ver Hero-n.

Técnicas de combinatoria



Razonamiento

Como en total hay 42 ~~bolas~~ posibilidades, 18 son negras y 24 blancas entonces sería $\frac{18}{42}$ negras que es un 42,9 % y $\frac{24}{42}$ que es 57,1 %. Es decir que no tiene la misma posibilidad de que salga negra o blancas así que en este juego tendría más posibilidades la película "Hero -n"



Hay 7 posibilidades: 4 de meter una bola negra y 3 de meter una blanca.

bola	probabilidad de sacar negra	probabilidad de sacar blanca
●	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$
●	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$
●	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$
●	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$
○	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$
○	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$
○	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$
Total	$\frac{18}{42} = \frac{3}{7}$	$\frac{24}{42} = \frac{4}{7}$

Es más probable sacar una bola blanca que una bola negra, y por lo tanto, más probable que vean "Hero-n" que que vean "Escuela de Rubik".

Si hiciéramos 42 intentos (porque es el m.c.m de 7 y 6 (6 ya que vamos a aumentar una bola siempre en la bolsa $\overline{B}$ al meter una bola de la A).
$\overline{A}$ $\overline{B}$

- de esos 42: Bolsa A: 18 salen blancas ($\frac{3}{7}$ de 42) y 24 negras ($\frac{4}{7}$ de 42) → ya que hay 7 bolas y 4 de ellas son negras. (Lo mismo con las blancas).

Bolsa B: de esas 18 blancas:

~~4/6~~ 12 veces saldrán bolas blancas ($\frac{4}{6}$ de 18) y 6 veces saldrán bolas negras ($\frac{2}{6}$ de 18).

12 blancas.
6 negras.

→ porque hay 6 y 4 son ~~hay~~ blancas (lo mismo con las negras).

de esas 24 veces ~~veces~~ que han salido negras:

12 son blancas ($\frac{3}{6}$ de 24) → porque hay 6 y 3 son blancas (lo mismo con las negras)
y 12 son negras ($\frac{3}{6}$ de 24).

12 blancas.
12 negras.

en total, de los 42 intentos 24 serán blancas y 18 serán negras.

- No tienen la misma probabilidad, hay $\frac{24}{42}$ de que sean blancas y $\frac{18}{42}$ de que sean negras.

PROPUESTAS METODOLÓGICAS II

SESIONES DEL PLAN DE COOPERACIÓN TERRITORIAL PARA EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN ARAGÓN

10 de noviembre de 2025

Pablo Beltrán-Pellicer

pbeltran@unizar.es

@pbeltranp

https://tierradenumeros.com

Universidad Zaragoza
1542