

Enseñar Geometría competencialmente

Desarrollar las competencias y aprender Geometría

CURSO ASESORES EN COMPETENCIA MATEMÁTICA

Alberto Arnal Bailera – Área de Didáctica de la Matemática – Universidad de Zaragoza



Facultad de Educación
Universidad Zaragoza

Enseñar Sentido Espacial competencialmente

Desarrollar el Sentido Espacial y aprender Geometría

CURSO ASESORES EN COMPETENCIA MATEMÁTICA

Alberto Arnal Bailera – Área de Didáctica de la Matemática – Universidad de Zaragoza



Facultad de Educación
Universidad Zaragoza

Sentido Espacial

- Modelo de VH de desarrollo del pensamiento geométrico.
 - Niveles de VH
 - Fases de VH
- Procesos del pensamiento geométrico.
 - Identificación
 - Clasificación
 - Definición
 - Demostración (+ Conjetura)

Sentido Espacial

los aprendizajes correspondientes al desarrollo del sentido espacial se han de enfocar en la construcción de conceptos, búsqueda de relaciones y perfeccionamiento de la intuición geométrica, a partir de la exploración, investigación y experimentación sobre tareas planteadas a partir del uso de manipulativos (físicos y virtuales) y objetos de uso cotidiano.

Currículo Primaria

C1. Formas geométricas en dos y tres dimensiones

-**Formas geométricas sencillas** de dos dimensiones en objetos de la vida cotidiana: identificación y clasificación atendiendo a sus elementos.

-**Estrategias y técnicas de construcción** de formas geométricas sencillas de una, dos o tres dimensiones de forma manipulativa.

-**Vocabulario geométrico básico**: descripción verbal de los elementos y las propiedades de formas geométricas sencillas.

-Propiedades de formas geométricas de dos dimensiones: exploración mediante materiales manipulables (mecanos, tangram, juegos de figuras, etc.) y herramientas digitales.

-Formas geométricas sencillas de dos **o tres** dimensiones en objetos de la vida cotidiana: identificación y clasificación atendiendo a sus elementos **y a las relaciones entre ellos**.

-Estrategias y técnicas de construcción de formas geométricas sencillas de dos dimensiones por **composición y descomposición mediante materiales manipulables, instrumentos de dibujo (regla y escuadra) y aplicaciones informáticas**.

-Vocabulario geométrico: descripción verbal de los elementos y las propiedades de formas geométricas sencillas.

-Propiedades de formas geométricas de dos dimensiones **y tres dimensiones**: exploración mediante materiales manipulables (cuadrículas, geoplanos, polícubos, etc.) y herramientas digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada, robótica educativa, etc.).

- Formas geométricas en objetos de la vida cotidiana: identificación y clasificación atendiendo a sus elementos y a las relaciones entre ellos.

- Técnicas de construcción de formas geométricas por composición y descomposición, mediante materiales manipulables, instrumentos de dibujo y aplicaciones informáticas.

- Vocabulario geométrico: descripción verbal de los elementos y las propiedades de formas geométricas.

- Propiedades de formas geométricas: exploración mediante materiales manipulables (cuadrículas, geoplanos, polícubos, etc.) y herramientas digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada, robótica educativa, etc.).

Currículo Primaria

C2. Localización y sistemas de representación:

-**Posición relativa de objetos en el espacio** e interpretación de movimientos: descripción en referencia a uno mismo a través de vocabulario adecuado (arriba, abajo, delante, detrás, entre, más cerca que, menos cerca que, más lejos que, menos lejos que...).

-Descripción de la posición relativa de objetos en el espacio **o representaciones suyas** utilizando vocabulario geométrico adecuado (paralelo, perpendicular, oblicuo, derecha, izquierda, etc.)

-Descripción verbal e interpretación de movimientos, en relación a uno mismo o a otros puntos de referencia utilizando vocabulario geométrico adecuado.

-**Interpretación de itinerarios en planos utilizando soportes físicos y virtuales**.

- Localización y desplazamientos en planos y mapas a partir de puntos de referencia (incluidos los puntos cardinales), direcciones y cálculo de distancias (escalas): descripción e interpretación con el vocabulario adecuado en soportes físicos y virtuales.

- Descripción de posiciones y movimientos en el primer cuadrante del sistema de coordenadas cartesiano.

Currículo Primaria

C.3. Movimientos y transformaciones:		
- Apreciar la simetría y la regularidad en objetos sencillos.	- Identificación de figuras transformadas mediante traslaciones y simetrías en situaciones de la vida cotidiana. - Generación de figuras transformadas a partir de simetrías y traslaciones de un patrón inicial y predicción del resultado.	- Transformaciones mediante giros, traslaciones y simetrías en situaciones de la vida cotidiana: identificación de figuras transformadas, generación a partir de patrones iniciales y predicción del resultado. - Semejanza en situaciones de la vida cotidiana: identificación de figuras semejantes, generación a partir de patrones iniciales y predicción del resultado.
C4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica:		
- Modelos geométricos de resolución de problemas relacionados con los otros sentidos . - Relaciones geométricas: reconocimiento en el entorno .	- Estrategias para el cálculo de perímetros de figuras planas y utilización en la resolución de problemas de la vida cotidiana. - Modelos geométricos en la resolución de problemas relacionados con los otros sentidos. - Reconocimiento de relaciones geométricas en campos ajenos a la clase de matemáticas, como el arte, las ciencias y la vida cotidiana.	- Estrategias para el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas en situaciones de la vida cotidiana. - Modelos geométricos en la resolución de problemas relacionados con los otros sentidos. - Elaboración de conjeturas sobre propiedades geométricas utilizando instrumentos de dibujo (compás y transportador de ángulos) y programas de geometría dinámica. - Las ideas y las relaciones geométricas en el arte, las ciencias y la vida cotidiana.

Currículo secundaria

C1. Formas geométricas en dos y tres dimensiones	
- Figuras geométricas planas y tridimensionales: descripción y clasificación de en función de sus propiedades o características. - Relaciones geométricas como la congruencia en figuras planas: identificación y aplicación. - Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada...)	- Figuras geométricas planas y tridimensionales: descripción y clasificación de en función de sus propiedades o características. - Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica en figuras planas y tridimensionales .: identificación y aplicación. - Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada...)
C2. Localización y sistemas de representación:	
C.3. Movimientos y transformaciones:	
C4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica:	
- Modelización geométrica: relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas. - Relaciones geométricas en contextos matemáticos y no matemáticos (arte, ciencia, vida diaria...).	- Modelización geométrica para representar y explicar relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas. - Relaciones geométricas: investigación en diversos sentidos (numérico, algebraico, analítico) y diversos campos (arte, ciencia, vida diaria...).

Hoy tenemos:

PARTE 1:

- Modelo de VH de desarrollo del pensamiento geométrico.
- Cuestiones sobre el Teorema de Pitágoras.
- Modelo VH vs. libro de texto:
 - Orden en los contenidos a trabajar.
 - Metodología.
 - ¿Qué falta cuando usamos un libro de texto?
- Práctica: Elaboración de una secuencia bajo VH “reciclando” un libro de texto.



PARTE 2:

- ¿Cómo integrar GGB en la UD?
 - Libros y Lecciones
 - Preguntas
- Taller GeoGebra para el razonamiento:
 - Triángulos y ejemplos
 - Conjetura + argumentación
 - Definir es argumentar

Modelo de VH de desarrollo del pensamiento geométrico

Reflexión previa

“[...] la explicación de numerosas incongruencias y errores reiterados por parte de los estudiantes, [...], se encuentra en una incomprensión entre profesores y alumnos, los cuales hablan y razonan en diversos niveles.” (Jaime, 1995)



Niveles de razonamiento geométrico de van Hiele

12

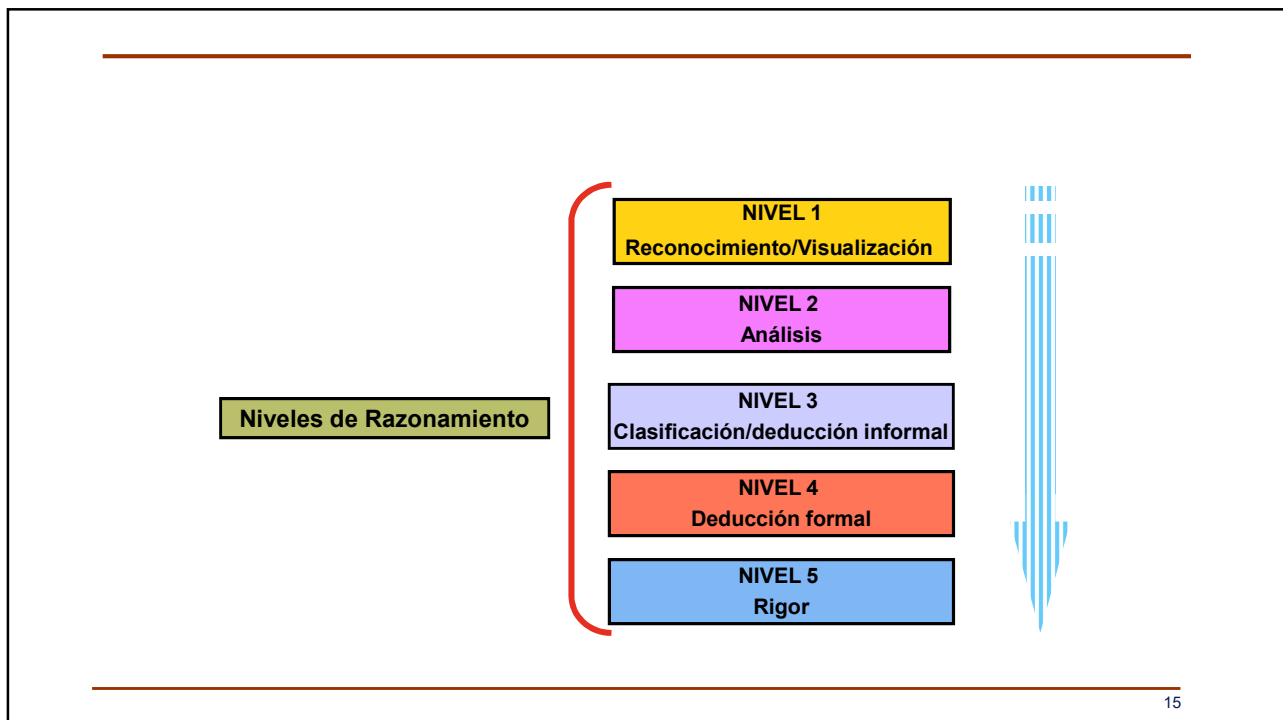
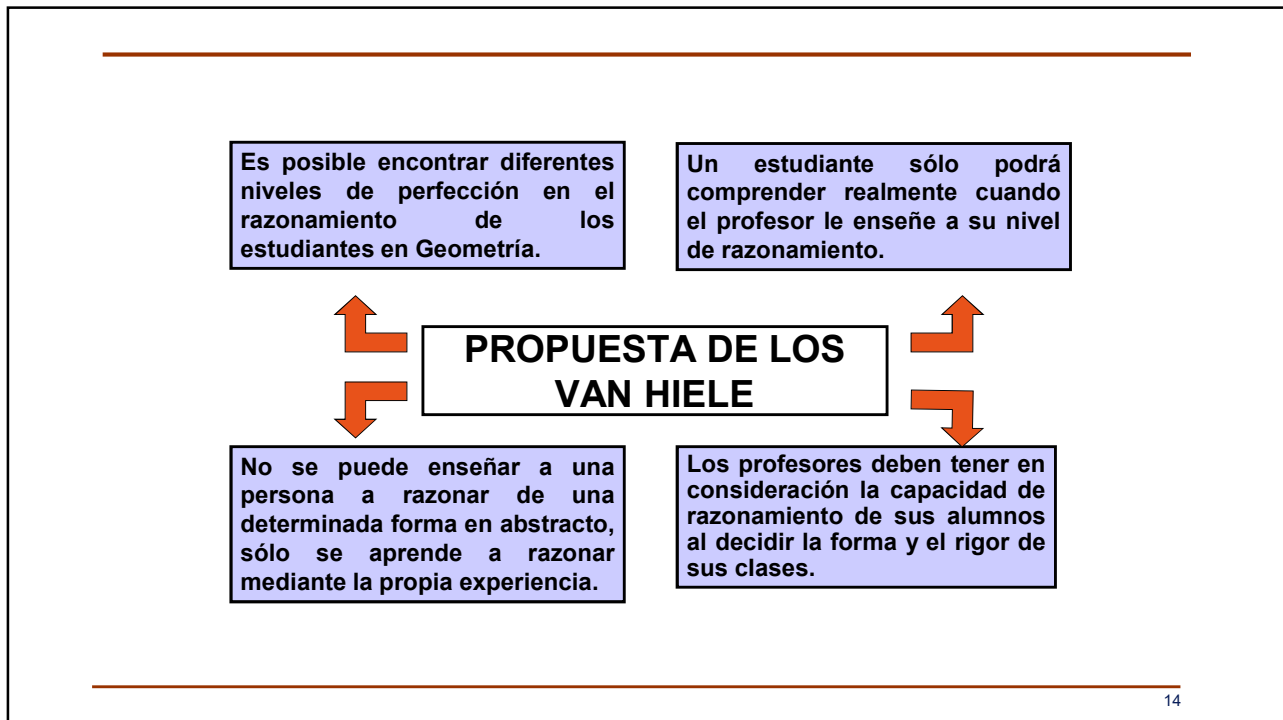
Definición?

¿Cómo se puede definir una cosa antes de saber lo que hay que definir?

La mayoría de las definiciones no son preconcebidas, sino el toque final de la actividad organizadora.

No hay que privar al niño de este privilegio...

Hans Freudenthal



NIVEL 1: RECONOCIMIENTO/VISUALIZACIÓN

Nivel 1 (reconocimiento): La consideración de los conceptos es *global*. No se tienen en cuenta elementos ni propiedades.

- Se pueden incluir atributos que no son característicos del concepto en cuestión.

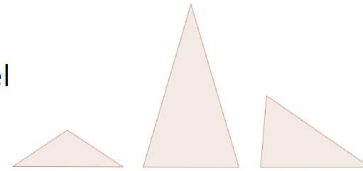


Fig 4. Todos tienen un lado horizontal.

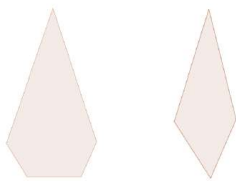
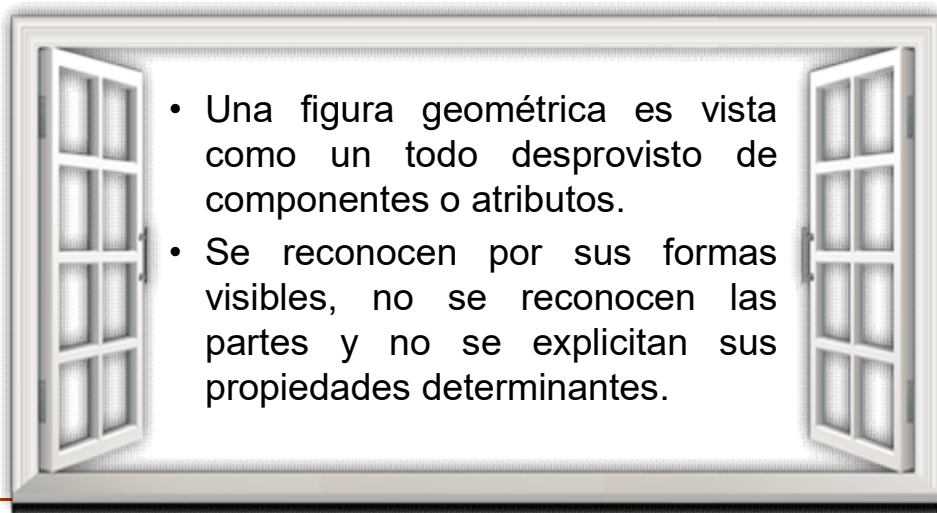


Fig 5. Se identifican como triángulos.

- La consideración global del concepto puede no incluir propiedades fundamentales.

16

NIVEL 1: RECONOCIMIENTO/VISUALIZACIÓN



- Una figura geométrica es vista como un todo desprovisto de componentes o atributos.
- Se reconocen por sus formas visibles, no se reconocen las partes y no se explicitan sus propiedades determinantes.

17

Nivel 1 - Resumen

- a) Percepción global de las figuras: en las descripciones se incluyen atributos de tipo físico irrelevantes.
- b) Percepción individual de las figuras: cada figura es considerada como un objeto, independiente de otras figuras de la misma clase.
- c) Uso de propiedades imprecisas para identificar, comparar, ordenar, o caracterizar figuras.
- d) Aprendizaje de un vocabulario matemático básico.
- e) No se suelen reconocer explícitamente las partes que componen las figuras ni sus propiedades matemáticas.

18

NIVEL 2: ANÁLISIS

Nivel 2 (análisis): Los conceptos se entienden y manejan a través de sus *elementos*. Se identifican y generalizan propiedades de dicho concepto pero no se establecen relaciones entre ellas.

Demostración: Se entiende como comprobación de unos pocos casos.

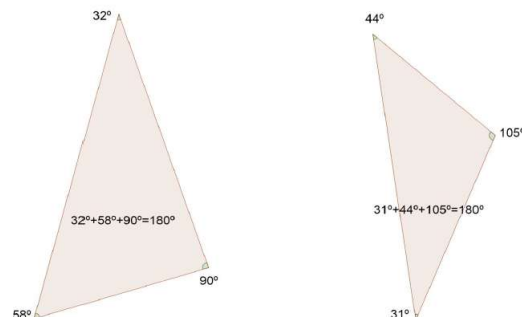


Fig 6. Demostración de nivel 2.

19

NIVEL 2: ANÁLISIS

Definición: Para definir un concepto se dan una lista de propiedades.

En ocasiones se omiten propiedades necesarias

En ocasiones se dan más propiedades de las suficientes

Rectángulo

“paralelogramo con dos lados más largos que los otros dos”

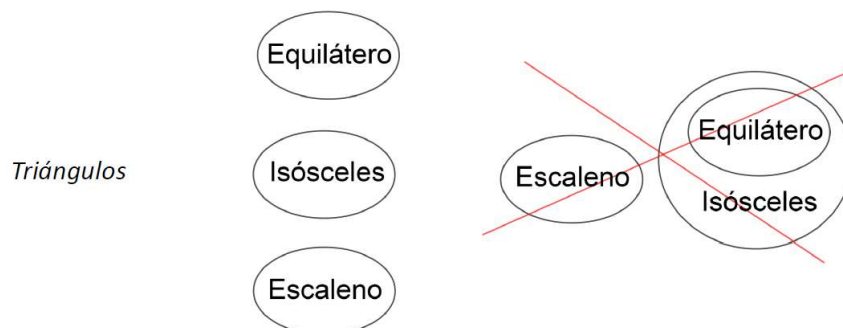
Rectángulo

“paralelogramo con lados iguales dos a dos, ángulos rectos, dos diagonales iguales, dos ejes de simetría, ...”

20

NIVEL 2: ANÁLISIS

Clasificación: las clasificaciones en este nivel son disjuntas.



21

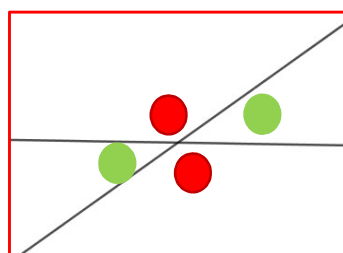
Ejemplo de actividad de nivel 2

Dada una serie de paralelogramos los estudiantes podrían, "coloreando" los ángulos iguales, "establecer" que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

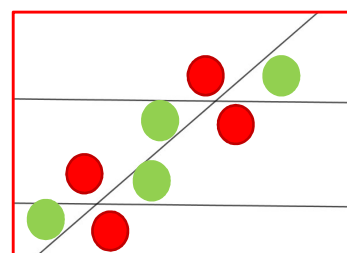
Después de usar varios ejemplos de este tipo, podrían hacer generalizaciones para todos los paralelogramos.

22

Si dos rectas son paralelas, se forman muchos ángulos iguales



Dos rectas que se cortan

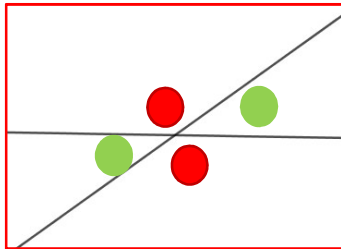


Dos rectas paralelas que se cortan con una transversal

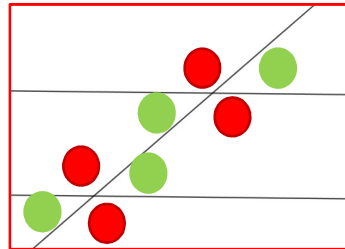
En cada caso, marca con el mismo color los ángulos que sean iguales. Explica en cada caso cuántos ángulos hay de cada color y dónde están.

23

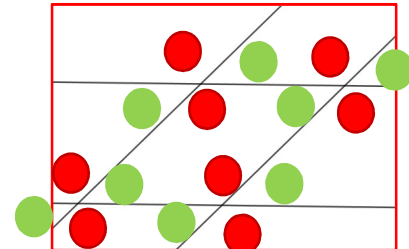
Si dos rectas son paralelas, se forman muchos ángulos iguales



Dos rectas que se cortan



Dos rectas paralelas que se cortan con una transversal



Dos r. paralelas que se cortan con 2 paralelas transversales

En cada caso, marca con el mismo color los ángulos que sean iguales.
Explica en cada caso cuántos ángulos hay de cada color y dónde están.

24

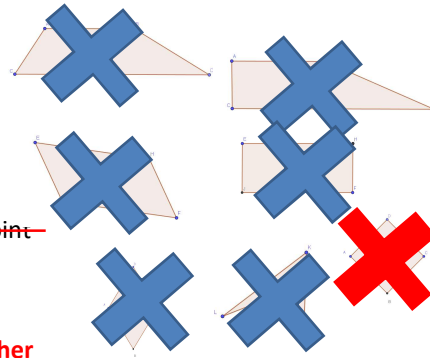
Nivel 2 - Resumen

- a) Las **figuras geométricas están formadas por partes** y están dotadas de propiedades matemáticas.
- b) La **definición** de un concepto consiste en el recitado de una lista de propiedades, (con **redundancias y omisiones**).
- e) No se relacionan diferentes propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras. No se establecen clasificaciones a partir de relaciones entre propiedades.
- d) La **deducción de propiedades se hace mediante experimentación**. Se generalizan dichas propiedades a todas las figuras de la misma familia.
- e) La **demonstración** de una propiedad se realiza mediante su **comprobación** en uno o pocos casos.

25

Guessing the mysterious figure

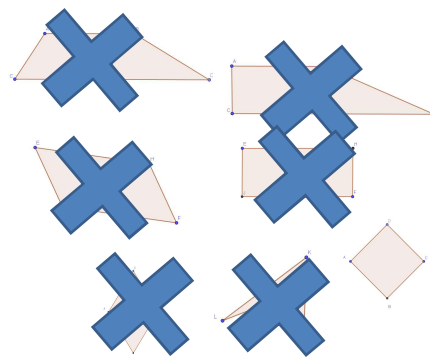
- 
1. It is a four-sided figure
 2. Its opposite sides are parallel
 - ~~3. Its opposite sides are congruent~~
 - ~~4. Its opposite angles are congruent~~
 5. Diagonals are perpendicular
 - ~~6. Its diagonals intersect at the midpoint~~
 7. Four angles are congruent
 8. Four sides are congruent
 - 9. One diagonal is longer than the other**



Alsina, Fortuny y Giménez. Bon día mates. http://www.xtec.cat/monografics/matematiques/bon_dia/credit3/59a.htm

Guessing the mysterious figure

- 
7. Four angles are congruent
 5. Diagonals are perpendicular
 - ~~2. Its opposite sides are parallel~~
 - ~~1. It is a four-sided figure~~



Alsina, Fortuny y Giménez. Bon día mates. http://www.xtec.cat/monografics/matematiques/bon_dia/credit3/59a.htm

Guessing the mysterious figure

- Si una condición no reduce el número de figuras, se puede eliminar de la definición ya que no concreta más el conjunto de soluciones -> Idea de redundancia. Es importante para mejorar el nivel VH.
- Si una condición/propiedad hace que ninguna figura cumpla la lista, es una contradicción.
- Tras reducir a una figura el conjunto, el resto de condiciones son propiedades que cumple esa figura.
- En una segunda fase se presentan las condiciones en orden inverso para reducir la lista y obtener la definición.
- Posibilidad de reordenar el conjunto de propiedades que determinan la definición y ver que la figura definida es la misma.

NIVEL 3: DEDUCCIÓN INFORMAL

Se pueden establecer interrelaciones en las figuras y entre figuras, lo que permite deducir propiedades de una figura y reconocer clases de figuras, y entender y reproducir una demostración formal.

Las definiciones
adquieren significado.

Rombo

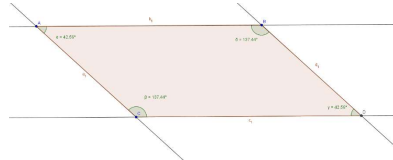
"cuadrilátero con todos sus lados
iguales"

Se entiende la
inclusión de clases.



Ejemplo de nivel 3

- En un cuadrilátero, para que los lados opuestos sean paralelos, es necesario que los ángulos opuestos sean iguales



- Entre figuras: un cuadrado es un rectángulo porque tiene todas sus propiedades
- Podríamos trabajar clasificaciones “relajando” condiciones.

30

Nivel 3 - Resumen

- Capacidad para **relacionar propiedades** de una figura entre sí o con las de otras figuras.
- Comprensión** de lo que es una **definición matemática** y sus requisitos. Se definen correctamente conceptos y familias de figuras.
- La **demostración** de una propiedad se basa en la **justificación general de su veracidad**, para lo cual se usan **razonamientos deductivos informales**.
- Comprensión de los pasos de una demostración explicada por el profesor. Capacidad para repetir tal demostración, no para realizar una demostración completa.

31

Nivel 4 - Resumen

- a) Capacidad para **comprender y desarrollar demostraciones** mediante razonamientos deductivos **formales**. Capacidad para adquirir una visión global de las demostraciones.
 - b) Aceptación de la posibilidad de **demostrar un resultado de diferentes formas** o a partir de distintas premisas.
 - c) **Aceptación de la existencia de definiciones equivalentes** de un concepto y uso indistinto de ellas.
 - d) Capacidad para **comprender la estructura axiomática de las matemáticas**: Significado y uso de axiomas, definiciones, teoremas, términos no definidos, etc.
-

32

Propiedades del Modelo de VH:

Secuencialidad: Los estudiantes pasan secuencialmente por los sucesivos niveles.

Instrucción: El avance entre niveles depende de la instrucción más que de la edad.

Explícito/Implícito: Los objetos implícitos en un nivel se explicitan en el siguiente.

Lingüístico: Cada nivel tiene vocabulario, símbolos y relaciones específicos.

Desajuste: El nivel del estudiante y de la instrucción deben ser el mismo.

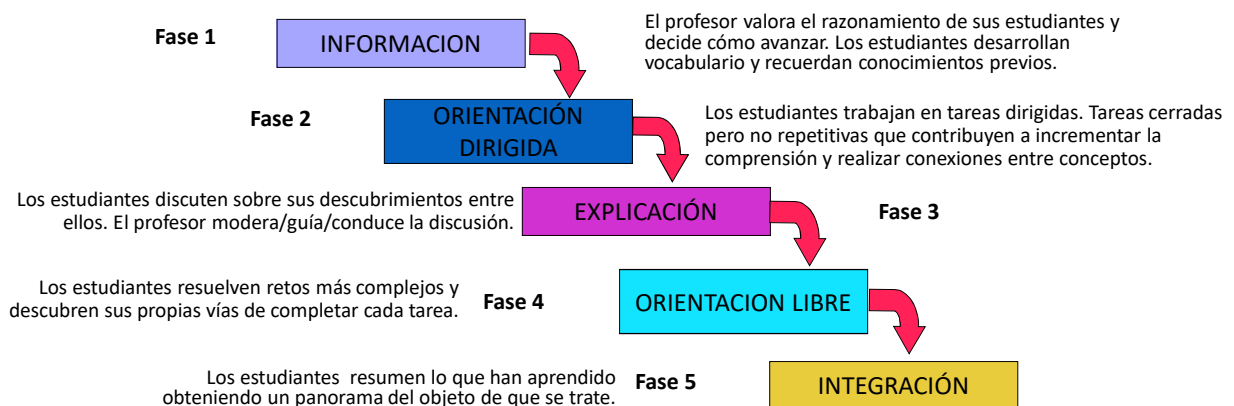
33

Propiedades: Secuencialidad-Progresividad- Explícito/Implícito-Lingüístico-Desajuste

	ELEMENTOS EXPLÍCITOS	ELEMENTOS IMPLÍCITOS
NIVEL 1	Figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
NIVEL 2	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos
NIVEL 3	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos	Deducción formal de teoremas
NIVEL 4	Deducción formal de teoremas	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)

34

Fases de enseñanza de Van Hiele



La enseñanza desarrollada así promueve la adquisición de un nivel superior de razonamiento más que la edad o la madurez intelectual del alumno.

FASES DE ENSEÑANZA

FASE 1: DIAGNÓSTICO / INFORMACIÓN	a) ¿Cuál es el conocimiento previo? b) ¿Qué vamos a estudiar? – Vocabulario.
FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA	a) Trabajo con materiales. b) Cuestiones breves, sin ambigüedad y secuenciadas.
FASE 3: EXPLICITACIÓN – FASE TRANSVERSAL	a) Intercambio de experiencias entre alumnos. b) Se explicita el sistema de relaciones entre los conceptos.
FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE	a) Tareas abiertas, más largas, con varias formas de resolución o con varias soluciones posibles. b) No son ejercicios de “aplicación”
FASE 5: INTEGRACIÓN	a) Poner en orden lo explicado. Síntesis. b) El alumno adquiere una visión general de todo lo visto.

EJEMPLOS de actividades organizadas según las fases de VH

1. Pareil, pas pareil: Trabajo de la igualdad de figuras planas según las fases de VH.
2. Linking the Van Hiele Theory to instruction: Trabajo de características relativas a la clasificación inclusiva desde primer ciclo de Primaria según las fases de VH.

Situation

CE2 Période 2

PAREIL, PAS PAREIL ? (1)

Ressources pour la situation havier-clix.fr/24semaine201

Le problème

Les élèves produisent des assemblages de trois pièces : un carré, un quart de disque et un triangle rectangle isocèle (de même longueur de côté ou rayon).

Dans la phase 2, ils ont à produire le plus d'assemblages possibles. Ils identifient ceux qui sont pareils par superposition.

Dans la phase 3, ils doivent reconnaître parmi un lot d'assemblages dessinés, ceux qui sont superposables, directement ou par retournement.

Connaissances visées

- Passer d'une perception globale d'une forme à l'analyse de ses composantes.
- Reconnaître si deux formes planes sont superposables ou non.

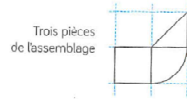
Résumé de la situation

- Dans la phase 1, les élèves se familiarisent avec le matériel.
- Dans la phase 2, ils produisent des assemblages et déterminent s'ils sont différents.
- Dans la phase 3, ils déterminent si les dessins d'assemblages sont superposables.

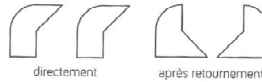
Organisation de la situation

- Une phase préliminaire (phase 1) de quelques minutes, dix à quinze jours avant l'activité.
- Deux séances, une pour chaque phase 2 et 3.

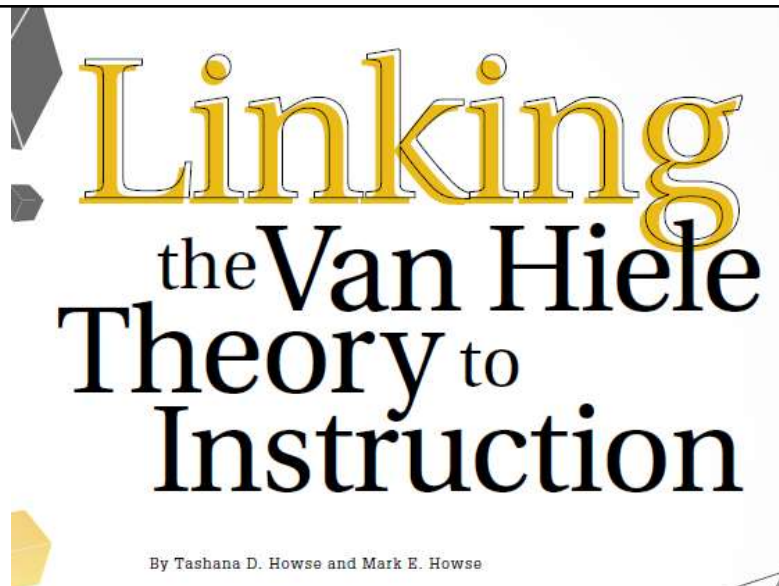
Question sur les enjeux de la situation : analyse p. 59



Exemples d'assemblages superposables



- Fase 1: Presentación del material, características, vocabulario.
- Fase 2: Construcción de figuras. Representación gráfica.
- Fase 3: Actividades de comunicación.
- Fase 4:
 - Opción 1: ¿falta algún diseño?
 - Opción 2: Búsqueda ordenada de todas las posibles soluciones.
- Fase 5: Juego



Reading guide

The information phase According to the Van Hiele, this first phase includes dialogue between the teacher and students regarding the geometric objects of focus. The purpose of this dialogue is primarily to inquire into students' prior knowledge of geometric shapes or concepts as well as to lay a foundation for subsequent learning activities (Van Hiele-Geldof 1984). To

Students were directed to sort the blocks into two or more categories on the basis of any set of shared attributes (Color, shape...) with **the goal of identify all the attributes in the blocks.**

After sorting, students were asked to explain the rationale for their sort. Neither of the groups sorted the attribute blocks on the basis of relative size or thickness.

To clarify students' understanding, the class was asked to find all the thin shapes and all the big shapes.

Directed orientation phase. Directed orientation is characterized by structured activities that challenge students to formally recognize and verbalize their understanding of the new geometric concepts that were introduced in the information phase

Difference: Color



1st Activity: Students were required to categorize the attribute blocks in pairs with one attribute difference

Difference: Shape-thickness



Goal: To deepen students' understanding of the basic shapes by encouraging students to make meaningful connections among the various attributes.

Difference: Color-shape-thickness



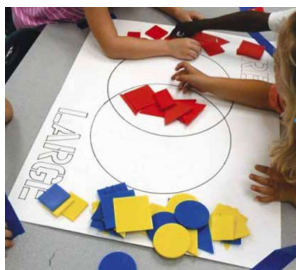
2nd Activity: Students were encouraged to find shapes with two attribute differences, and then three attribute differences

Explication



According to Van Hiele, the explication phase of learning involves engaging students in verbalizing their understanding of the geometric concepts that they have observed. The role of the teacher during this phase is to facilitate dialogue that allows students to explain their understanding using the appropriate language.

The specific goal of the activity for this phase was to have students use Venn diagrams as a focus of dialogue regarding the attribute blocks.



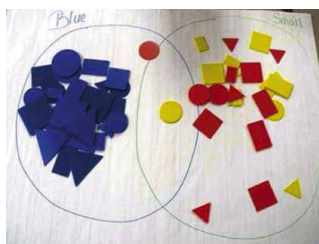
Starting with two empty, nonintersecting circles to sort all the shapes. Labels: Red and Large.

After, the teacher presented two interlocking circles with the same labels.

Students could verbalize their understandings of the attributes of the shapes through connections, a skill that is consistent with the Van Hiele explication phase of learning.

Free orientation

free orientation phase, in which students develop their own way to complete geometric tasks.



Groups were requested to complete a peer-made Venn diagram to ensure their understanding of the relationships and attributes of the blocks.

Student's understanding was assessed by asking questions about their drawings. Most of the questions were focused in the intersection zone.

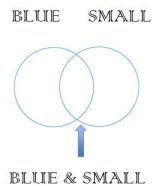
Integration

the last learning phase, integration. In this phase, students use all the concepts to complete a task.

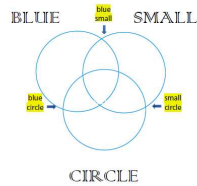
FIGURE 3

During the culminating activity of the geometry lesson, students played a game that was similar to Scrabble®, but instead of a game board with spaces for letters, they used a Venn diagram with two or three intersecting circles.

(a) Game board



(b) Advanced game board



Students played a game that is similar to Scrabble®. Instead of having spaces for letters, the game board is a Venn diagram with two or three intersecting circles. Instead of blindly choosing seven letters, students blindly chose seven attribute blocks from a bag. The objective of the game is to have the fewest number of shapes left in your possession at game's end. Shapes that do not belong will remain in students' possession.

Achievements

TABLE 3

The authors created an observational checklist to assess learning during the game. The goal for students was to reason and interpret the related concepts with confidence and accuracy.

Observational checklist behaviors

- ☐ Student demonstrates the ability to reason among the attributes of the blocks.
- ☐ Student demonstrates the appropriate interpretation of a Venn diagram.
- ☐ Student successfully places appropriate shapes in the appropriate location on the Venn diagram.
- ☐ Student exudes confidence when placing blocks on the Venn diagram.
- ☐ Student recognizes that certain blocks may not belong on the Venn diagram.

Dos cuestiones importantes en el sentido espacial: Estereotipos e igualdad

1. Estereotipos: Introducción de conceptos nuevos atendiendo a los problemas derivados de la presentación de figuras estereotipadas.
2. Igualdad de objetos geométricos y resolución de problemas.

1 Stereotypes and learning obstacles in Geometry

Draw a square!

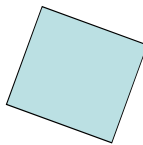


How many of you have drawn this one?

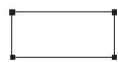
Why not this one?



Or this one?



Draw a rectangle!



How many of you have drawn this one?

Why not this one?



Or this one?

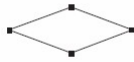


Draw a rhombus!



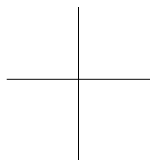
How many of you have drawn this one?

Why not this one?



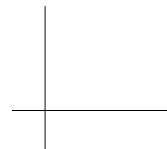
Or this one?

Draw two perpendicular lines!

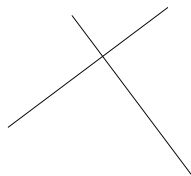


How many of you have drawn these?

Why not those?



Or those?



GRAPHIC STEREOTYPED REPRESENTATIONS

Textbooks show frequently these kind of representations.

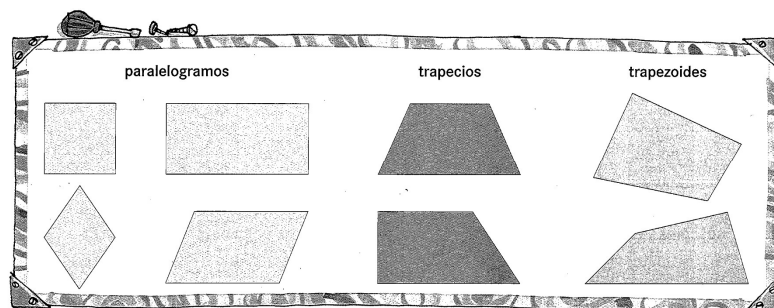
It meets the need of simplifying the figure's drawing.

The first lines drawn are parallel to the sides of the paper.

-Square: parallel sides.

-Rhombus: parallel diagonals.

GRAPHIC STEREOTYPED REPRESENTATIONS



PROTOTYPICAL EXAMPLES

These examples are images built by the child based on the stereotyped representations seen.

STEREOTYPED REPRESENTATIONS

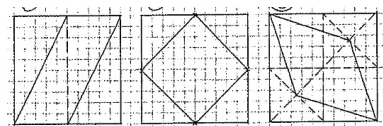
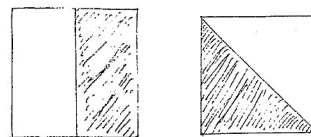


PROTOTYPICAL EXAMPLES

Children compare the graphic representation and their own prototypical example. Their decisions are based upon the similarities of both representations. Children do not consider the definition of the object.

An example...

- Given a square, built within it a polygon whose area is half .
- Imagine that your design is going to be used to shape your home tiles. Look for a nice design.



<https://www.geogebra.org/m/rGJVHrAd>

OSTENSIVE GEOMETRY TEACHING

- Geometry teaching is characterized by showing the geometric objects by graphic representations.
- It is not checked if these representations fulfil the properties established in their definitions.
- Definitions are not analyzed.
- As a result of that, children do not recognize objects if those are not close to the prototypical example. Even if they meet the definition.

PROBLEMS ARISING FROM THE CHOICE OF A STEREOTYPICAL REPRESENTATION

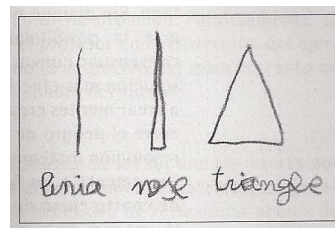
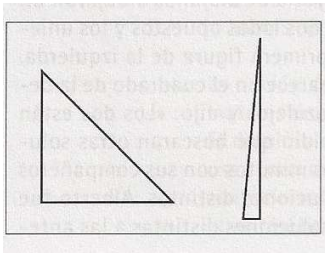
The height and the median of a triangle from the same vertex measures are 4 and 5 cm. respectively. Find the distance between the endpoints of the segments.

La altura y mediana de un triángulo que parten del mismo vértice miden 4 y 5 cm respectivamente. Encuentra la distancia entre los pies de los dos segmentos.

Geometric problems depend on a graphic representation. If it is not adequate, the problem becomes more difficult.

CONSEQUENCES FOR TEACHING

- Graphic representations must vary all the picture properties that are not characteristic of the geometric object.
- We have to draw different geometric objects, keeping the essential properties, not the stereotyping ones.

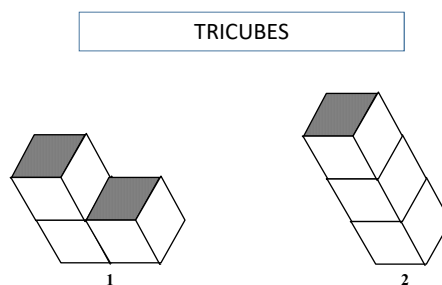


**2 Igualdad de objetos
geométricos y resolución de
problemas.**

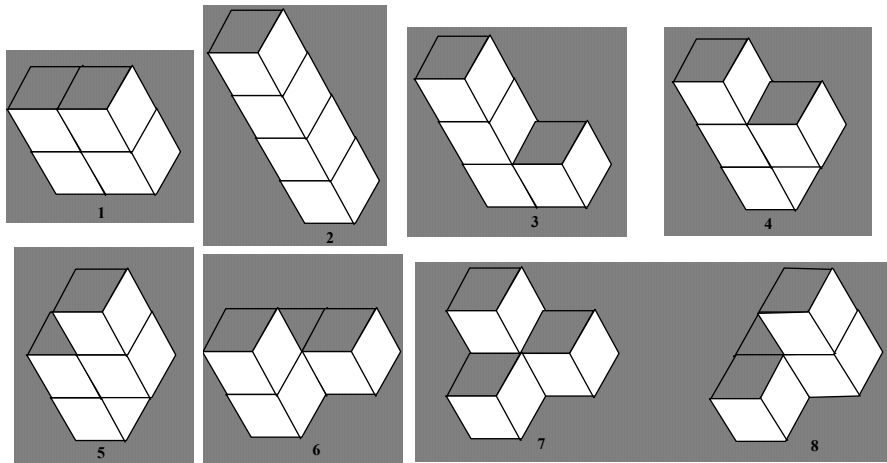
2 Igualdad en objetos geométricos y resolución de problemas

- Construye todas las figuras diferentes que seas capaz utilizando 4 policubos.
- ¿Diferentes?
- ¿Por dónde empiezo?
- Reducir el problema a otro menor.
- Seguir un orden en la resolución de un problema.
- Utilizar el material para apoyar la resolución de un problema.
- Diseñar una estrategia para atacar el problema con 5 policubos.

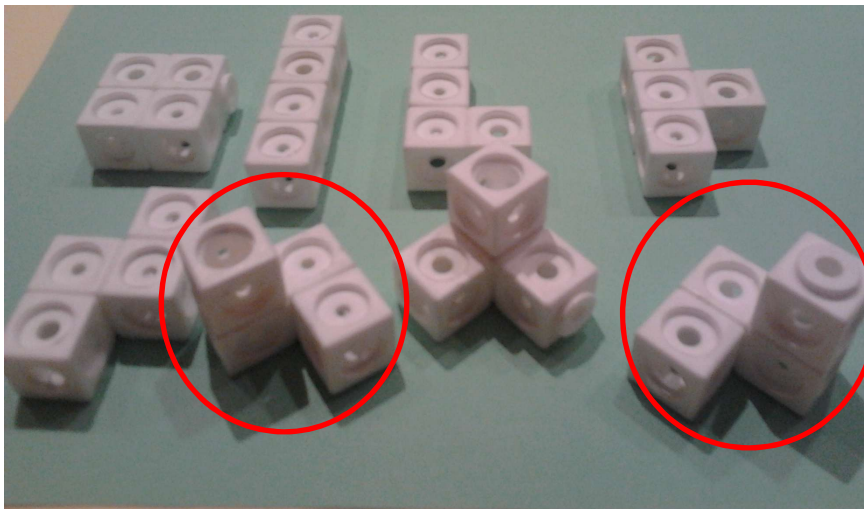
Tricubes are formed by 3 cubes joint one to another by a face in a way that any of them has at least one side in common with one of the. Two different tricubes can be built:



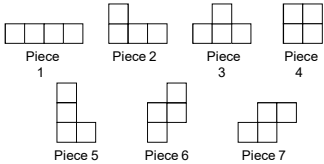
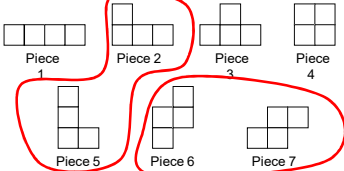
Using polycubes built and draw in the isometric frame all the possible different tetracubes.



tetracubes



SUMMING UP...

	PHISICAL EQUALITY	GEOMETRICAL EQUALITY
2 DIMENSIONS	Movements: rotation, translation: 7 different tetrominoes. 	Movements: rotation, translation, axial symmetry: 5 different tetrominoes. 
3 DIMENSIONS	Movements: rotation, translation: 8 different tetracubes. 	Movements: rotation, translation, reflection symmetry : 7 different tetracubes. 

HOW MANY POLYCUBES ARE THERE?

n	Name of n -polycube	Number of polycubes	
		PHYSICAL EQUALITY (reflections counted as distinct)	GEOMETRICAL EQUALITY (reflections counted together)
1	monocube	1	1
2	dicube	1	1
3	tricube	2	2
4	tetracube	8	7
5	pentacube	29	23
6	hexacube	166	112
7	heptacube	1023	607
8	octocube	6922	3811

HOW MANY POLYOMINOES ARE THERE?

n	Name of n -polyomino	Number of polyominoes	
		(folding paper is not permitted)	"TETRIS RULES" (folding paper is permitted)
1	Monomino	1	1
2	Domino	1	1
3	Tromino	2	2
4	Tetromino	7	5
5	Pentomino	18	12
6	Hexomino	60	35
7	Heptomino	196	108
8	Octomino	704	369