

Sentido numérico



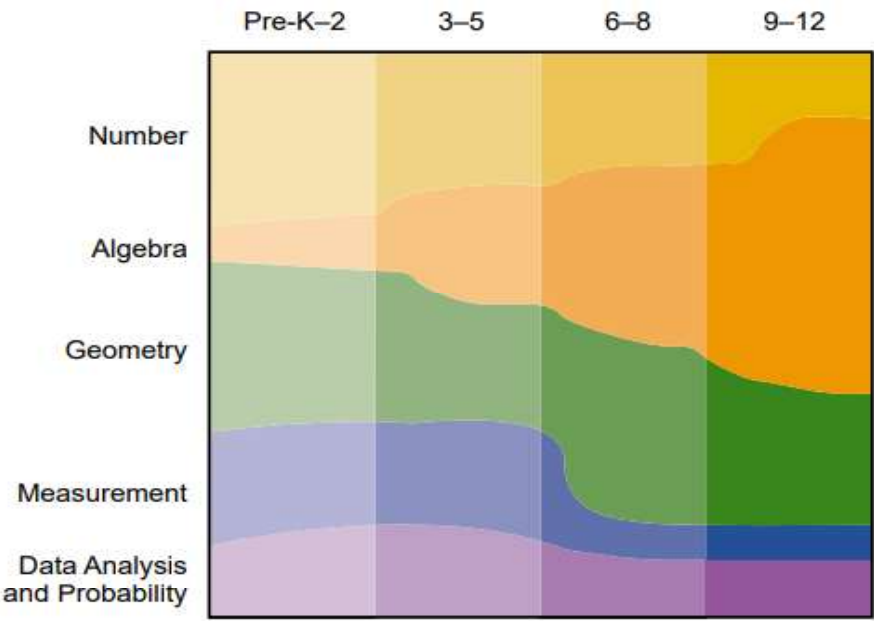
Mónica Arnal Palacián
marnalp@unizar.es



Cronograma

- Sentido numérico I y II (8 de septiembre).
- Sentido de la medida I y II (15 de septiembre).
- Sentido algebraico y computacional I y II (22 de septiembre).
- Sentido espacial I y sentido estocástico I (29 de septiembre).
- Sentido espacial II y sentido estocástico II (6 de octubre).
- Sentido socioafectivo y Competencia matemática en pruebas diagnósticas (20 de octubre).
- Evaluación sumativa: instrumentos y criterios de calificación y GeoGebra y aprendizaje competencial I (27 de octubre).
- GeoGebra y aprendizaje competencial II y Propuestas metodológicas I (3 de noviembre).
- Propuestas metodológicas II y Conocimiento especializado y competencias docentes del profesorado de matemáticas (10 de noviembre).
- Funcionamiento de centros docentes y Retos para el asesoramiento (17 de noviembre).

Sentido numérico



Tiempo dedicado a cada bloque de contenido (NCTM, 2000)

Sentido numérico

Saberes	Conocimientos, destrezas y actitudes	
	Currículo nacional (MEFP, 2022)	Currículo autonómico Aragón (BOA, 2022)
Conteo	Estrategias variadas de conteo y recuento sistemático en situaciones de la vida cotidiana en cantidades hasta el 999.	Estrategias variadas de conteo y recuento sistemático en situaciones de la vida cotidiana en cantidades iniciando el trabajo con centenas.
Cantidad	Estimaciones razonadas de cantidades en contextos de resolución de problemas.	
	Lectura, representación (incluida la recta numérica y con materiales manipulativos), composición, descomposición y recomposición de números naturales hasta 999.	Lectura, representación, composición, descomposición y recomposición de números naturales iniciando el trabajo con centenas .
Sentido de las operaciones	Representación de una misma cantidad de distintas formas (manipulativa, gráfica o numérica) y estrategias de elección de la representación adecuada para cada situación o problema.	
	Estrategias de cálculo mental con números naturales hasta 999.	Estrategias de cálculo mental con números naturales iniciando el trabajo con centenas.
Relaciones	Suma y resta de números naturales resueltas con flexibilidad y sentido: utilidad en situaciones contextualizadas , estrategias y herramientas de resolución y propiedades.	
	Sistema de numeración de base diez (hasta el 999): aplicación de las relaciones que genera en las operaciones.	Sistema de numeración de base diez iniciando el trabajo con centenas: aplicación de las relaciones que genera en las operaciones.
	Números naturales en contextos de la vida cotidiana: comparación y ordenación .	
Razonamiento proporcional	n/a	Iniciación al pensamiento relativo.
Educación financiera	Sistema monetario europeo: monedas (1, 2 euros) y billetes de euro (5, 10, 20, 50 y 100), valor y equivalencia.	

Sentido numérico

Saberes	Conocimientos, destrezas y actitudes	
	Currículo nacional (MEFP, 2022)	Currículo autonómico Aragón (BOA, 2022)
Conteo	Estrategias variadas de conteo, recuento sistemático y adaptación del conteo al tamaño de los números en situaciones de la vida cotidiana en cantidades hasta el 9999.	Estrategias variadas de conteo , recuento sistemático y adaptación del conteo al tamaño de los números en situaciones de la vida cotidiana en cantidades hasta las unidades de millar.
Cantidad	Estrategias y técnicas de interpretación y manipulación del orden de magnitud de los números (decenas, centenas y millares).	
	Estimaciones y aproximaciones razonadas de cantidades en contextos de resolución de problemas. Lectura, representación (incluida la recta numérica y con materiales manipulativos), composición, descomposición y recomposición de números naturales hasta 9999.	Lectura, representación (incluida la recta numérica y con materiales manipulativos), composición, descomposición y recomposición de números naturales hasta las unidades de millar .
	Fracciones propias con denominador hasta 12 en contextos de la vida cotidiana.	Fracciones con denominadores manejables en contextos cercanos al alumnado.
Sentido de las operaciones	Estrategias de cálculo mental con números naturales y fracciones.	
	Estrategias de reconocimiento de qué operaciones simples (suma, resta, multiplicación, división como reparto y partición) son útiles para resolver situaciones contextualizadas .	
	Construcción de las tablas de multiplicar apoyándose en número de veces, suma repetida o disposición en cuadrículas.	
	Suma, resta, multiplicación y división de números naturales resueltas con flexibilidad y sentido en situaciones contextualizadas : estrategias y herramientas de resolución y propiedades.	
Relaciones	Sistema de numeración de base diez (hasta el 9999): aplicación de las relaciones que genera en las operaciones.	Sistema de numeración de base diez (hasta las unidades de millar): aplicación de las relaciones que genera en las operaciones.
	Números naturales y fracciones en contextos de la vida cotidiana: comparación y ordenación .	
	Relaciones entre la suma y la resta, y la multiplicación y la división: aplicación en contextos cotidianos.	
Razonamiento proporcional	n/a	Razón entre magnitudes: introducción a su cálculo e interpretación.
Educación financiera	Cálculo y estimación de cantidades y cambios (euros y céntimos de euro) en problemas de la vida cotidiana: ingresos, gastos y ahorro . Decisiones de compra responsable.	

Sentido numérico

Saberes	Conocimientos, destrezas y actitudes	
	Currículo nacional (MEFP, 2022)	Currículo autonómico Aragón (BOA, 2022)
Conteo	Estrategias variadas de conteo , recuento sistemático y adaptación del conteo al tamaño de los números en situaciones de la vida cotidiana.	
Cantidad	Estrategias y técnicas de interpretación y manipulación del orden de magnitud de los números.	
	Estimaciones y aproximaciones razonadas de cantidades en contextos de resolución de problemas.	
	Lectura, representación (incluida la recta numérica y con materiales manipulativos), composición, descomposición y recomposición de números naturales y decimales hasta las milésimas.	Lectura, representación, composición, descomposición y recomposición de números naturales y decimales hasta las milésimas .
	Fracciones y decimales para expresar cantidades en contextos de la vida cotidiana y elección de la mejor representación para cada situación o problema.	
Sentido de las operaciones	Estrategias de cálculo mental con números naturales, fracciones y decimales.	
	Estrategias de reconocimiento de qué operaciones simples o combinadas (suma, resta, multiplicación, división) son útiles para resolver situaciones contextualizadas .	
	Potencia como producto de factores iguales. Cuadrados y cubos.	
	Estrategias de resolución de operaciones aritméticas (con números naturales, decimales y fracciones) con flexibilidad y sentido: mentalmente, de manera escrita o con calculadora; utilidad en situaciones contextualizadas y propiedades.	
Relaciones	Sistema de numeración de base diez (números naturales y decimales hasta las milésimas): aplicación de las relaciones que genera en las operaciones.	Sistema de numeración de base diez (números naturales y decimales): aplicación de las relaciones que genera en las operaciones.
	Números naturales, fracciones y decimales hasta las milésimas en contextos de la vida cotidiana: comparación y ordenación .	
	Relaciones entre las operaciones aritméticas: aplicación en contextos cotidianos.	
	Relación de divisibilidad : múltiplos y divisores.	
	Relación entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.	
Razonamiento proporcional	Situaciones proporcionales y no proporcionales en problemas de la vida cotidiana: identificación como comparación multiplicativa entre magnitudes.	
	Resolución de problemas de proporcionalidad, porcentajes y escalas de la vida cotidiana, mediante la igualdad entre razones, la reducción a la unidad o el uso de coeficientes de proporcionalidad.	Resolución de problemas de proporcionalidad en contextos diversos cercanos al alumnado (vida cotidiana, porcentajes, escalas, ...) reflexionando a partir de las razones involucradas.
Educación financiera	Resolución de problemas relacionados con el consumo responsable (valor/precio, calidad/precio y mejor precio) y con el dinero: precios, intereses y rebajas .	

Sentido numérico

Desde la investigación existen establecidas 8 categorías con las que organizar el sentido numérico fundamental (FoNS). A partir de las ellas se pudiese ofrecer a los estudiantes oportunidades para consolidar su aprendizaje.

Categoría	Descripción de la categoría
Reconocimiento del número	Identificar un símbolo numérico concreto de entre una colección de símbolos numéricos y nombrar un número cuando se le muestra su símbolo.
Conteo sistemático	Contar sistemáticamente, tanto hacia adelante como hacia atrás y desde puntos de partida arbitrarios.
Relacionar el número con la cantidad	Comprender la correspondencia uno a uno entre el nombre de un número y la cantidad que representa
Discriminación cuantitativa	Comparar magnitudes y utilizar expresiones como “más grande que” o “más pequeño que”.
Diferentes representaciones	Reconocer, trabajar y establecer conexiones entre diferentes representaciones numéricas.
Estimación	Estimar, ya sea del tamaño de un conjunto o de un objeto.
Aritmética simple	Realizar operaciones sencillas de suma y resta.
Patrones numéricos	Reconocer y ampliar patrones numéricos y, en particular, identificar un número que falta.

El número natural

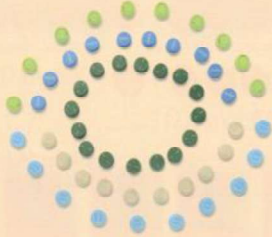
Enseñanza y aprendizaje oral

4 Count the numbers.



During arts class, we arranged many objects.

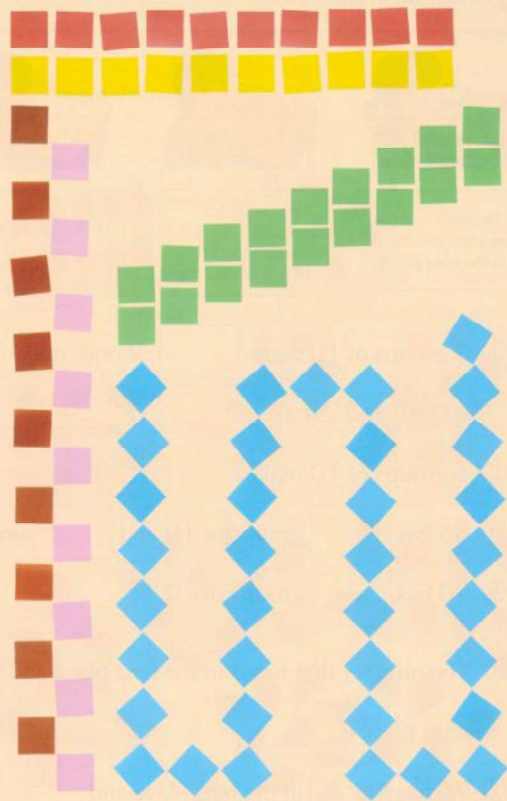
① Bottle caps



② Pudding cups



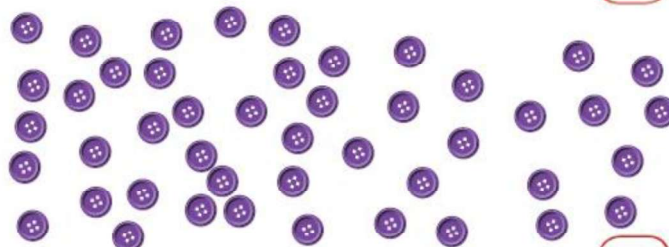
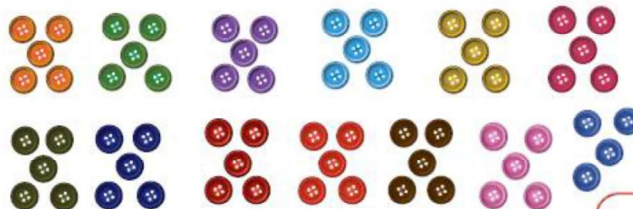
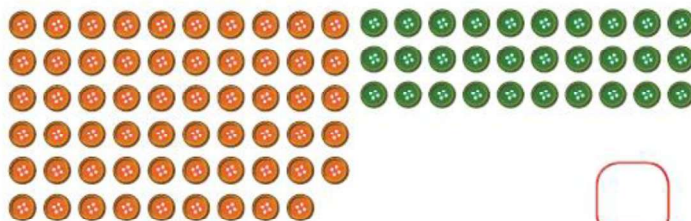
③ Origami paper



3. ¿Cuántos son?

131

- 1 Cuenta de dos maneras distintas los botones.
Escribe cuántos son.





¡Todos al bus!. Editorial: La Coccinella.



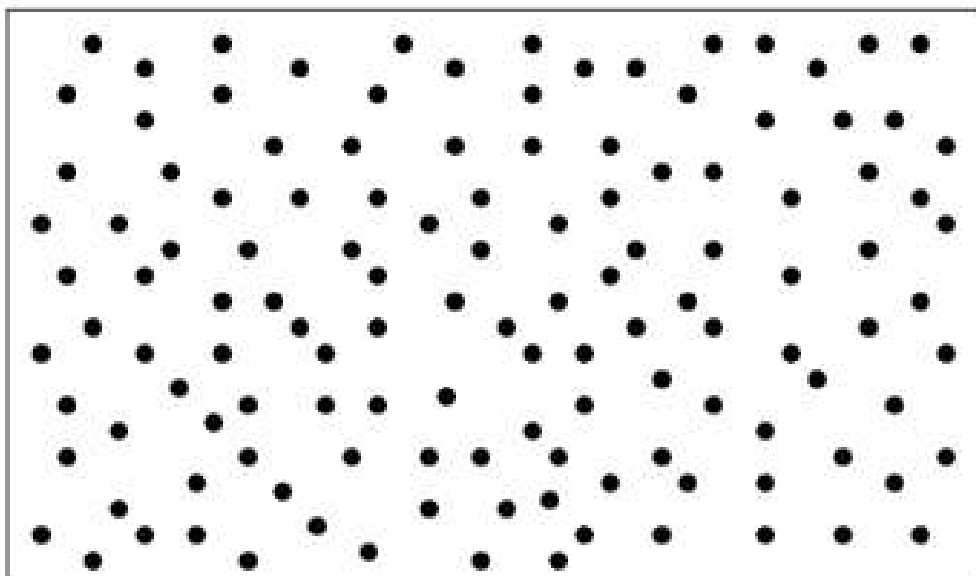
Ser quinto. Loguez Ediciones.



Contando, contando, te vas a la cama soñando. Anaya



Mi infinito. FUN readers.



- a) ¿Cuántos puntos hay?
- b) Y si solo existiesen los símbolos A, B, C y D , ¿cómo comunicaríamos el número de puntos que hay?
- c) Si tuviésemos 12 símbolos en lugar de 4, ¿cómo comunicaríamos el número de puntos que hay?

Situación aprendizaje 1 (Currículo Ed. Infantil)

Disponemos de una colección de cajas de cerillas en las que existe un hueco en un lateral. Pedimos a los niños y a las niñas que tomen palillos de un bote que se sitúa en el extremo opuesto del aula e introduzcan uno y solo uno, en todas y cada una de las cajas. Es importante, que el material del que esté hecho la caja impida el control visual continuo en el desarrollo de la actividad, es decir, no puede percibirse con una sola mirada, en el transcurso de la actividad, lo ya realizado y lo que queda por realizar.

Se trata de actividad de emparejamiento que no utiliza técnicas de contar.

Este juego posibilita la aparición de las técnicas auxiliares que permiten adquirir principio de correspondencia 1 a 1.

Tarea. ¿Cómo debería modificarse la actividad para que fuese una situación de conteo?

Memorización de la secuencia numérica

- Nivel cuerda
- Nivel cadena irrompible
- Nivel cadena rompible
- Nivel cadena rompible bidireccional
- Nivel cadena numerable
- Nivel cadena numerable bidireccional

Progresión en el aprendizaje

Es esencial para el conteo y operar con números durante toda la Educación Primaria.

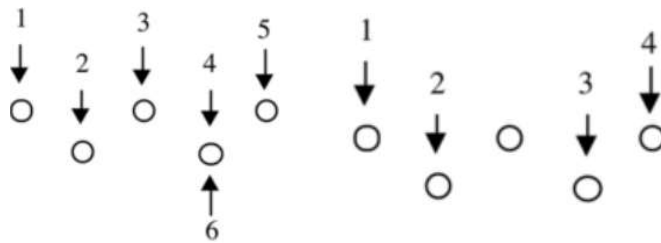
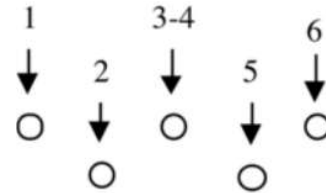
Memorización de la secuencia numérica

1. No todos los niños pasan por todos los niveles.
2. Un niño puede estar en distintos niveles según los tramos de la secuencia numérica.

Errores en la ejecución de la técnica de contar

Tarea. ¿Qué se necesita para poder contar?

- Errores de recitado
- Errores de coordinación
- Errores de partición



¿Combinatoria?

Problema 1. Para acudir a una fiesta, el disfraz requiere de ponerse dos pulseras y un collar. Si se dispone de cinco pulseras y tres collares diferentes. ¿De cuántas maneras se puede combinar las joyas para acudir a la fiesta de disfraces?

Problema 2. En estuche tengo siete pinturas de distinto color. Si elijo cuatro ellas, ¿cuántas maneras tengo de elegir las?

Problema 3. En un colegio han formado 18 equipos para jugar un torneo de datchball. Han pensado que, aunque el recreo sea el mismo para todos, exista un partido de ida y otra de vuelta. ¿Cuántos partidos se jugarán en el torneo?

¿Combinatoria?

Problema 1. Para acudir a una fiesta, una señora, quiere ponerse dos pulseras y un collar. Si dispone de cinco pulseras y tres collares diferentes. ¿De cuántas maneras puede combinar sus joyas para acudir a la fiesta?

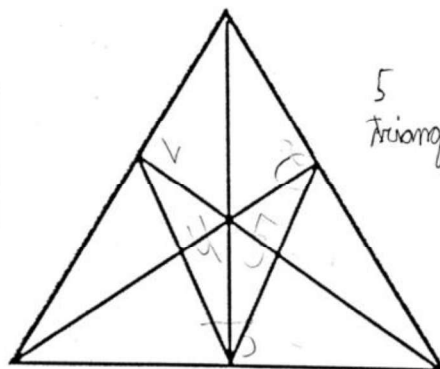
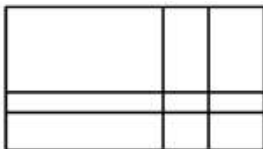
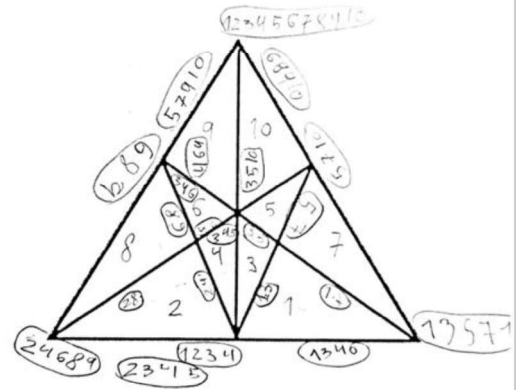
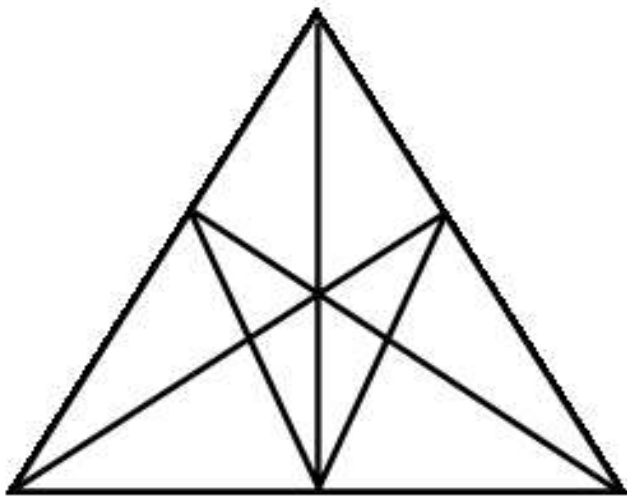
Pulseras		Collares				
		P.1=	P.2=	P.3=	P.4=	P.5=
1	ROSA Y VERDE	p.1-p.2	p.2-p.3	p.3-p.4	p.4-p.5	no se pueden Hacer más grupos
2	ROSA Y VERDE	p.1-p.3	p.2-p.4	p.3-p.5		
3	ROSA Y VERDE	p.1-p.4	p.2-p.5			
4	ROSA Y GR	p.1-p.5				
5	ROSA Y GR					
6	ROSA Y GR					
7	ROSA Y GR					
8	ROSA Y GR					
9	ROSA Y GR					
10	ROSA Y GR					
11	ROSA Y GR					
12	ROSA Y GR					
13	VERDE Y GRANATE					
14	VERDE Y GRANATE					
15	VERDE Y GRANATE					
16	VERDE Y GRANATE					

¿Combinatoria?

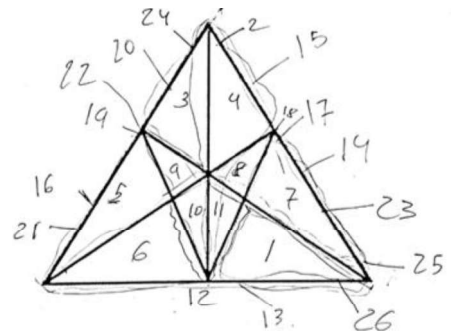
Problema 1. Para acudir a una fiesta, una señora, quiere ponerse dos pulseras y un collar. Si dispone de cinco pulseras y tres collares diferentes. ¿De cuántas maneras puede combinar sus joyas para acudir a la fiesta?

1- Primero he leído el enunciado y me he puesto a pensar como lo puedo hacer
2- he dibujado 5 + 2 pulseras
3 - he dibujado 3 + 1 collar
Se puede poner 7 pulseras y 4 collares

¿Combinatoria?



5
triángulos

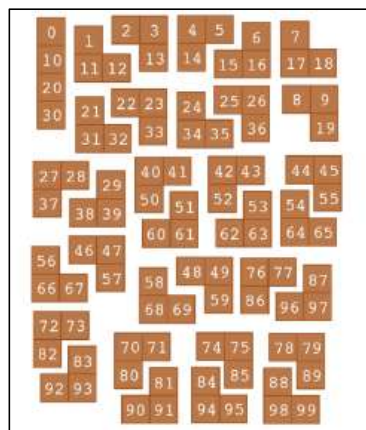
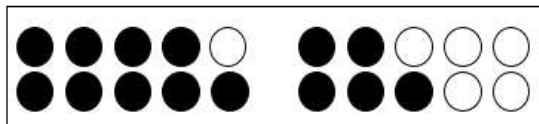
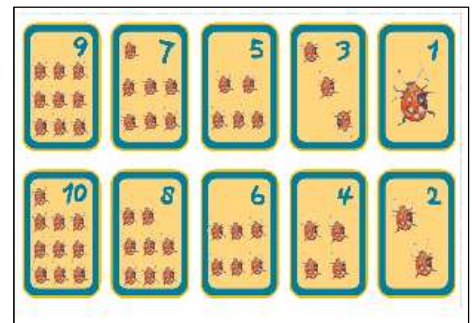
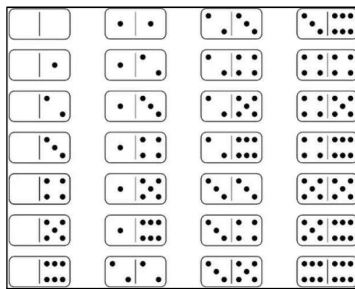
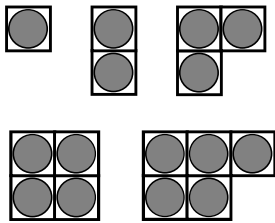


Algunos materiales o recursos

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Algunos materiales o recursos



Estimación

Estimación

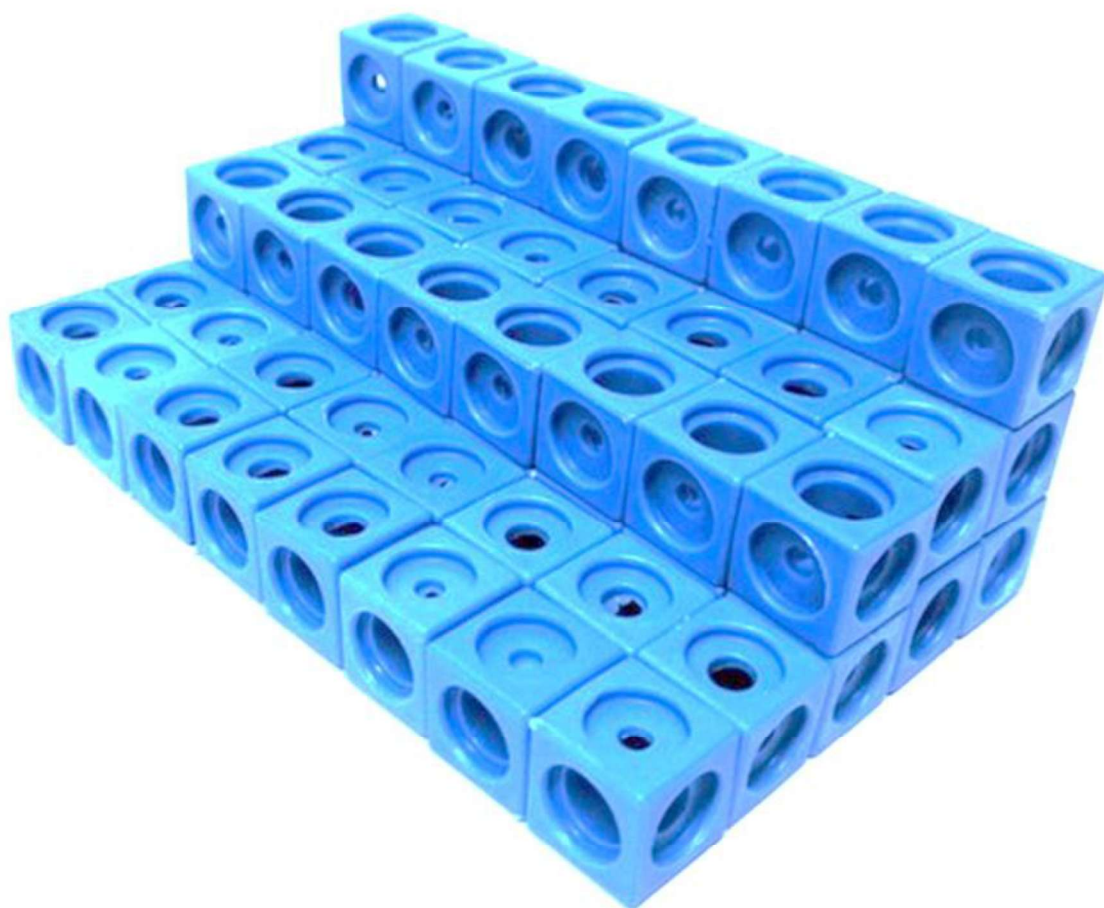
La estimación de la numerosidad consiste en estimar el número de elementos estructurados o no estructurados en una colección limitada sin realizar un recuento exacto.

Para evitar el recuento:

- Presentar la imagen poco tiempo, por ejemplo 20”.
- Las cantidades se encuentren en el rango numérico de 31 a 144.

Este rango de cantidades es realista para los alumnos de 3º, ya que ya se les ha enseñado los rangos numéricos.





Sistemas de numeración

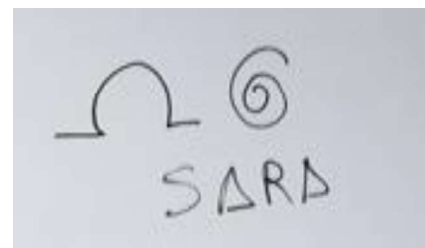
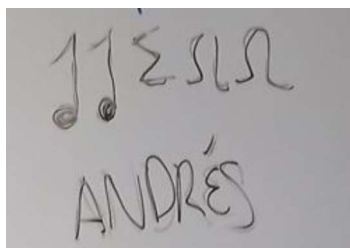
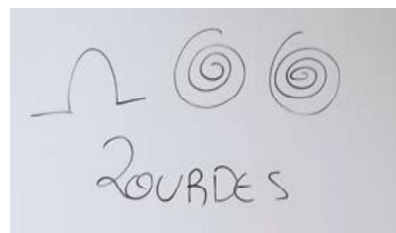
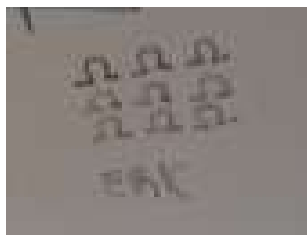
Sistema de numeración extraterrestre

Un extraterrestre que llega a la Tierra se interesa por el sistema de numeración escrita que utilizamos los terrestres. Cuando le explican en qué consiste, él comenta: ¡Ah! Nosotros escribimos los números utilizando solo cuatro símbolos:

Ω , Σ , ♪ y 

Tarea. ¿Cómo escribe el extraterrestre el número nueve?

Sistema de numeración extraterrestre



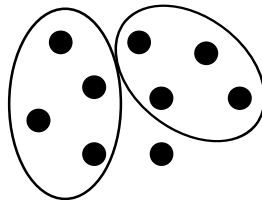
Tres ideas fundamentales

- Se emplean **4 símbolos distintos** (cifras)

Ω , Σ , ♪ y 

- **Agrupamientos de 4 en 4** sucesivos.
- **La posición** de cada cifra de un número tiene un significado específico y diferenciado.

9 elementos



♪ Σ

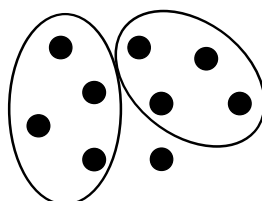
Tres ideas fundamentales (base 4)

- Se emplean **4 símbolos distintos** (cifras)

0 1 2 3

- **Agrupamientos de 4 en 4** sucesivos.
- **La posición** de cada cifra de un número tiene un significado específico y diferenciado.

9 elementos



2 1

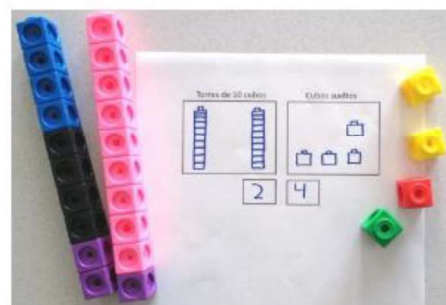
Situación de aprendizaje 1: Lectura y escritura de números de dos cifras

En el aula hay seis cajas, distribuidas convenientemente, con doscientos cubos encajables en cada una de ellas. Los cubos están sueltos. Los niños de 1º de Primaria, organizados en pequeños grupos, reciben la siguiente instrucción del profesor: *“Debéis ir a la caja de los cubos y coger veinticuatro cubos que llevaréis a vuestra mesa. Después tenéis que construir todas las torres de diez cubos que podáis”*. Una vez realizada la tarea el profesor les da un papel para que dibujen las torres y los cubos que han quedado sueltos, y escriban debajo el número de torres y el de cubos.

torres de diez cubos

Tarea.

¿Qué necesita saber el alumno?



Situación de aprendizaje 1: Lectura y escritura de números de dos cifras

En la tabla siguiente indica qué conocimientos matemáticos son necesarios para que el niño realice correctamente las correspondientes acciones.

Acción	Conocimiento matemático
Ir a la caja y coger el número de cubos indicado	Técnica de recuento para construir un conjunto de cardinal 24.
Construir torres de diez cubos	Técnica de agrupamiento decimal.
Rellenar la ficha	Técnica de recuento para obtener el cardinal 2. Técnica de recuento para obtener el cardinal 4. Escritura de números de una cifra. (2, 4) Introducir el criterio de la posición

Sistemas de numeración

Tarea. ¿Qué hacer para construir un sistema de numeración?

- Privilegiar ciertos números: la(s) **base(s)** del sistema, sus **potencias** (y múltiplos), ...
- Concebir todos los demás números descompuestos en esas bases.

Sistemas de numeración. Sistemas posicionales

Símbolos para:

- la unidad
- los valores comprendidos entre la unidad y la base
- el cero (símbolo para indicar la “*no existencia*”).

El **número** representado se obtiene:

- Multiplicando el valor del símbolo (cifra) que ocupa cada posición por la potencia de la base elevada al exponente que indica la posición.
- Sumando todos los resultados.

Sistemas de numeración. Sistemas aditivos

Símbolos para:

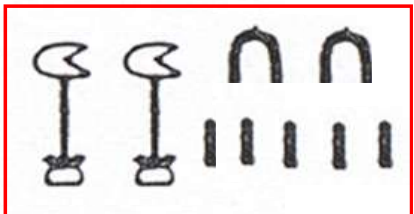
- la unidad
- la base
- las potencias de la base

El **número** representado se obtiene:

Sumando los valores numéricos de los símbolos que lo componen.

- Egipcio (Base 10)
- Romano (Base 10 y base auxiliar 5)

Sistemas aditivos. Egipcio

1	I	
10	U	
100	Lotus	2025
1 000	Throne	
10 000	Lotus	
100 000	Snake	
1 000 000	God	

Las cifras jeroglíficas egipcias.

Sistemas de numeración. Sistemas híbridos

Símbolos para:

- la unidad
- la base
- las potencias de la base
- los valores comprendidos entre la unidad y la base

El **número** representado se obtiene:

- Multiplicando cada potencia de la base por el valor del símbolo que le precede.
 - Sumando estos resultados junto con las unidades.
- Chino (Base 10) (1500 a.C)

Sistema de numeración híbrido. Chino

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	萬
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	10 000

$$2\ 025 = 2 \times 1000 + 2 \times 10 + 5$$

二千二十五

Sistema de numeración

En todos los libros de texto podemos encontrar representaciones del número (722, en este caso) como éstas:



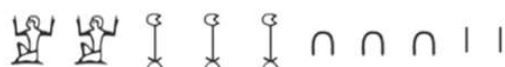
Tarea. Señala los diferentes sistemas de numeración que aparecen en el texto.

4 Cuenta y completa. Después, escribe cómo se lee ese número.

Below the base blocks, there is a form to write the expanded form: $\square C + \square D + \square U = \square + \square + \square = \square$. Below this is a blank line for writing the number name.

Sistema de numeración

Une cada uno de los números en el sistema de numeración egipcio con su correspondiente en el actual sistema numérico decimal.


422


2 003 032


230 200

四百二十二
 五千六十二
 三万九百

5 062

30 900

422







3 685

74

58

Sistema de numeración

Sistema de numeración **escrito**

Sistema posicional de base 10.

Los símbolos son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9

Sistema de numeración **oral** (cardinal)

Sistema híbrido de base 10 con irregularidades.

Los símbolos definidos para

- la unidad: *uno*
- los números desde la base a la unidad: *dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve*
- la base: *diez*
- las potencias de la base: *cien o ciento, mil, millón...*

3 817 = tres-mil ocho-cientos “diez y siete”

¡¡ existen bastantes irregularidades !!

Sistemas de numeración

Sistema de numeración **oral** (ordinal)

Sistema **aditivo** de base 10 con bases auxiliares.

Los símbolos definidos para

- la unidad: *primero* (o *primer*)
- la base: *décimo*
- las potencias de la base: *centésimo, milésimo, millonésimo...*
- las bases auxiliares (todos desde la base a la unidad): *segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo y noveno*
- el producto de las bases auxiliares por las potencias de la base:
vigésimo, trigésimo, cuadragésimo, quincuagésimo, ..., ducentésimo, tricentésimo, cuadrigentésimo, ...

Sistemas de numeración

Sistema de numeración **sexagesimal**

Para expresar la medida del tiempo y la amplitud de los ángulos.

Sistema **posicional** de **base 60**, combinado con un sistema posicional de **base auxiliar 10**.

𐎶 1	𐎶𐎵 11	𐎶𐎵𐎶 21	𐎶𐎵𐎶𐎵 31	𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 41	𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 51
𐎶𐎶 2	𐎶𐎶𐎵 12	𐎶𐎶𐎵𐎶 22	𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 32	𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 42	𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 52
𐎶𐎶𐎶 3	𐎶𐎶𐎶𐎵 13	𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 23	𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 33	𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 43	𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 53
𐎶𐎶𐎶𐎶 4	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 14	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 24	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 34	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 44	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 54
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 5	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 15	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 25	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 35	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 45	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 55
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 6	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 16	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 26	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 36	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 46	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 56
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 7	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 17	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 27	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 37	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 47	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 57
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 8	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 18	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 28	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 38	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 48	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 58
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 9	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 19	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 29	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 39	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 49	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵 59
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 10	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵 20	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶 30	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵 40	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶 50	

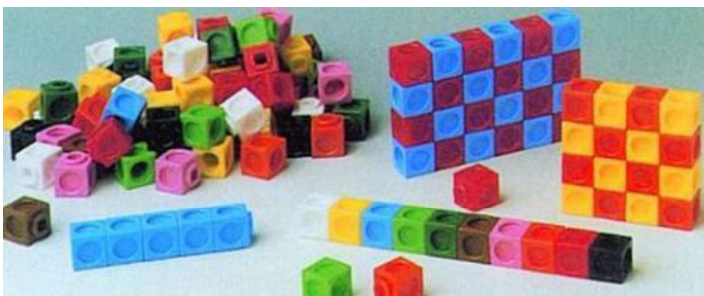
Sistema de numeración babilónico

0	1	2	3	4
⦿	•	••	•••	••••
5	6	7	8	9
—	—•	—••	—•••	—••••
10	11	12	13	14
— —	—•	—••	—•••	—••••
15	16	17	18	19
— — —	—•	—••	—•••	—••••

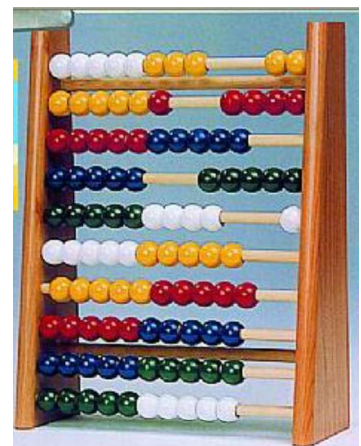
Sistema numeración maya

Materiales recomendados

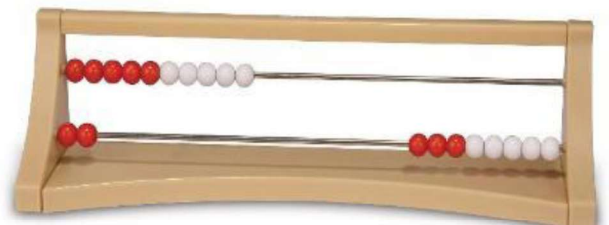
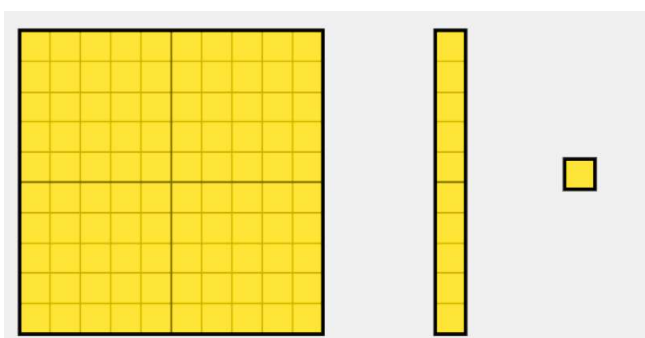
Policubos



Ábaco horizontal



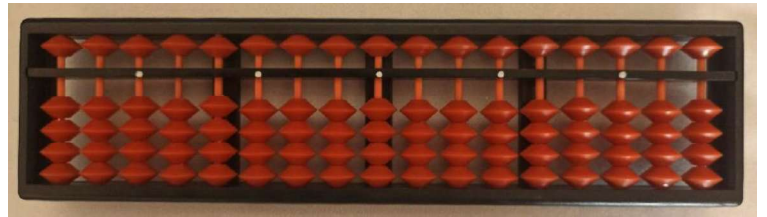
Placas-barras y puntos (multibase)



Materiales no recomendados.



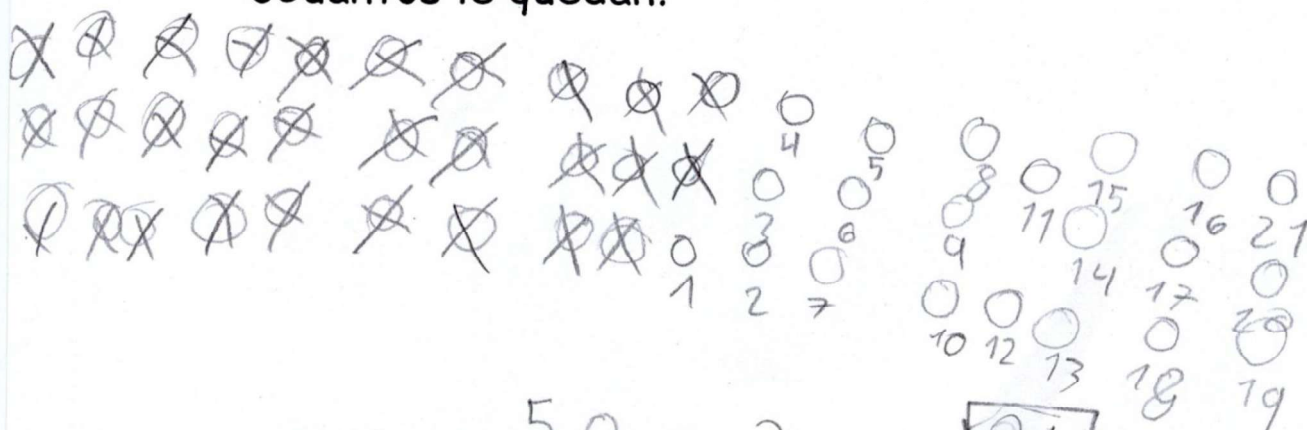
Ábacos verticales



Sorobán (Japón)

Resolución de problemas aditivos

Raquel tiene 50 euros. Gasta 30 euros.
¿Cuántos le quedan?



RESPUESTA:

$$50 - 30 = 20$$

Estructura semántica de las situaciones que dan significado a las operaciones de + y -

Situaciones aditivas de una etapa



Se resuelven mediante una suma o una resta

Dos datos



Dos cantidades conocidas

Una incógnita



La solución de la situación

Transformación

Variación de una cantidad inicial

Comparación

Diferencia entre dos cantidades

Estado

Estructura semántica de las situaciones que dan significado a las operaciones de + y -

Tarea 1: Inventa un problema que sea resuelto con una suma o una resta de números naturales.

Tarea 2: Inventa otro problema que sea resuelto con la misma operación que el anterior, pero sea más difícil.

Transformación – Transformación – Transformación (TTT)

Situación en la que una cantidad inicial no explícita sufre:

- una **primera transformación** Tp1 y
- después una **segunda transformación** Tp2,
- la cantidad **Tt** indica la **transformación total**.

Carolina va al kiosko a comprar chuches. Gasta 50 cents en chupa-chups, 20 cents en sidra y 15 cents en pulpos de gominola. ¿Cuántos céntimos se gasta en total?

Comparación - Transformación - Comparación (CTC)

Situación en la que se establece:

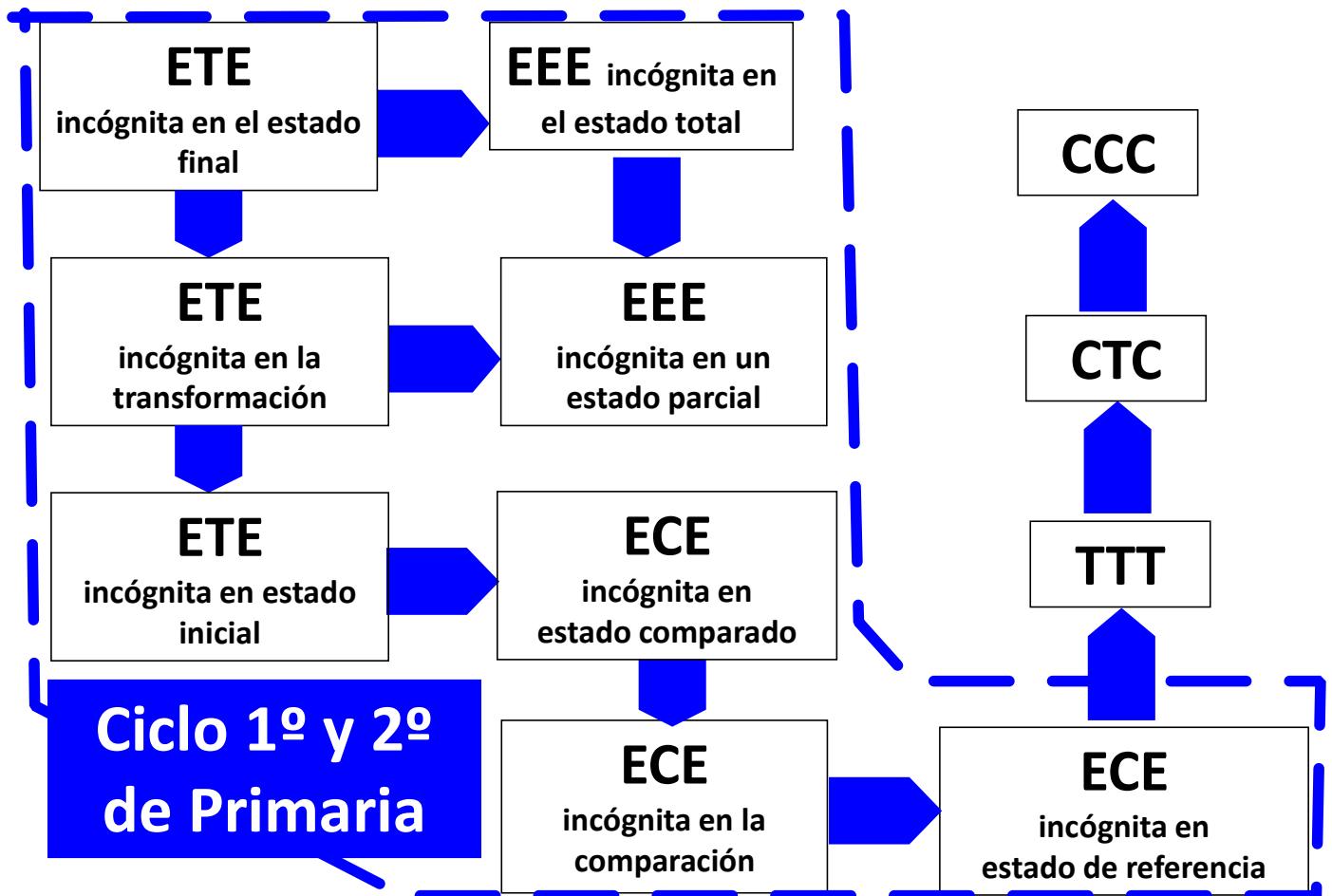
- Una **comparación inicial C_{12}**
entre dos cantidades no explícitas.
- Posteriormente, una de dichas cantidades sufre
una transformación T , y,
- Por último, $C_{1'2}$ representa la **comparación**
entre la cantidad transformada y
la otra cantidad de la comparación inicial.

Comparación - Comparación - Comparación (CCC)

Situación en la que hay tres cantidades no explícitas:

- C_{12} expresa la comparación entre la primera y la segunda
- C_{23} indica la comparación entre la segunda y la tercera
- C_{13} establece la comparación entre la primera y la tercera cantidad.

Orden creciente de dificultad



1º. Tengo 120 sillas y 40 mesas en el almacén.

¿Cuántas sillas mas que mesas tender en mi almacén?

• $120+40$

$$\begin{array}{r} 120 \\ + 40 \\ \hline 160 \end{array}$$

Tengo en mi almacén 160 sillas mas que mesa

2º. Tengo 120 sillas y 40 mesas en el almacén.

Las 120 sillas se rompen 40 de ellas.

¿Cuántas sillas hay?

• $120-40$

$$\begin{array}{r} 120 \\ - 40 \\ \hline 080 \end{array}$$

hay 80 sillas.

2º. Tengo 120 sillas y 40 mesas en el almacén.

y para una fiesta a las 120 sillas le tengo

que quitar las 40 mesas ¿Cuántas sillas

me quedarían?

• $120-40$

$$\begin{array}{r} 120 \\ - 40 \\ \hline 080 \end{array}$$

Me quedan 80 sillas

1 Une cada situación con una pregunta.

1. En un frutero hay 17 manzanas rojas y 3 ciruelas verdes.

2. En un frutero había 18 naranjas y Raúl coge 5.

3. En un frutero había 15 peras y Rocio pone 8 ciruelas.

4. En un frutero hay 17 piezas de fruta. 6 son plátanos y el resto son naranjas.



¿Cuántas naranjas quedan en el frutero?

¿Cuántas piezas de fruta hay en total?

¿Cuántas naranjas hay en el frutero?

¿Cuántas piezas de fruta hay ahora?

Tarea. ¿Existe solución única a esta tarea? ¿Qué estructura(s) semántica(s) aparecen?

1 Inventa un problema con estos datos y resuélvelo.

DATOS 25 lápices
10 lápices



OPERACION =

SOLUCIÓN

1 Inventa los datos y completa la pregunta. Después, resuelve.

Iván y Olga coleccionan chapas.

Iván tiene

y Olga tiene más que Iván.

¿Cuántas chapas tiene ?

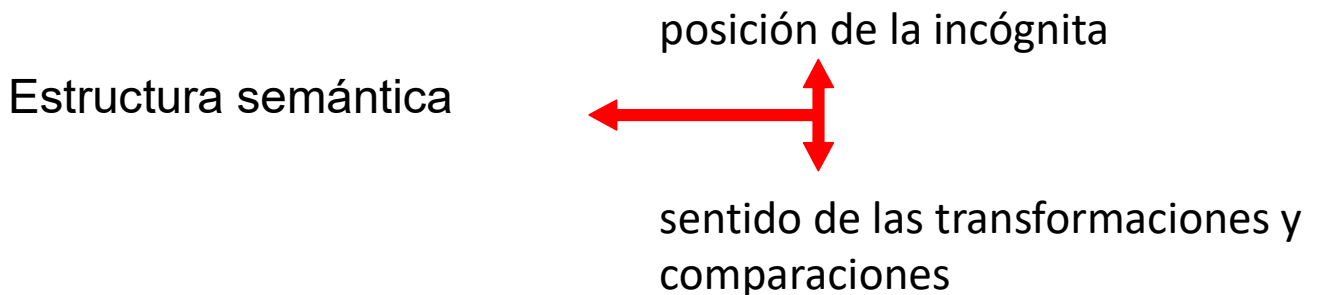
=



Tarea. Atendiendo a la estructura semántica, el lugar de la incógnita y la operación inventa todos los tipos de problemas que podrían aparecer en las producciones de tus estudiantes. ¿Crees que los dos fragmentos tienen la misma dificultad para tus estudiantes?

Clasificación de los problemas aditivos

Plantear problemas de dificultad creciente según las siguientes variables:



Tamaño de los datos (números pequeños vs. números grandes)

Grado de contextualización de la situación

Situaciones aditivas

El alumno debe resolverlas por si mismo.

Papel del profesor:

- ☐ No le dice al niño cómo se hace
- ☐ Controla que entiende el enunciado
- ☐ Anima a que encuentre una estrategia de resolución mediante:
 - la representación de la situación con material (preferiblemente no estructurado) y
 - el conteo.
- ...

Resolución de problemas multiplicativos

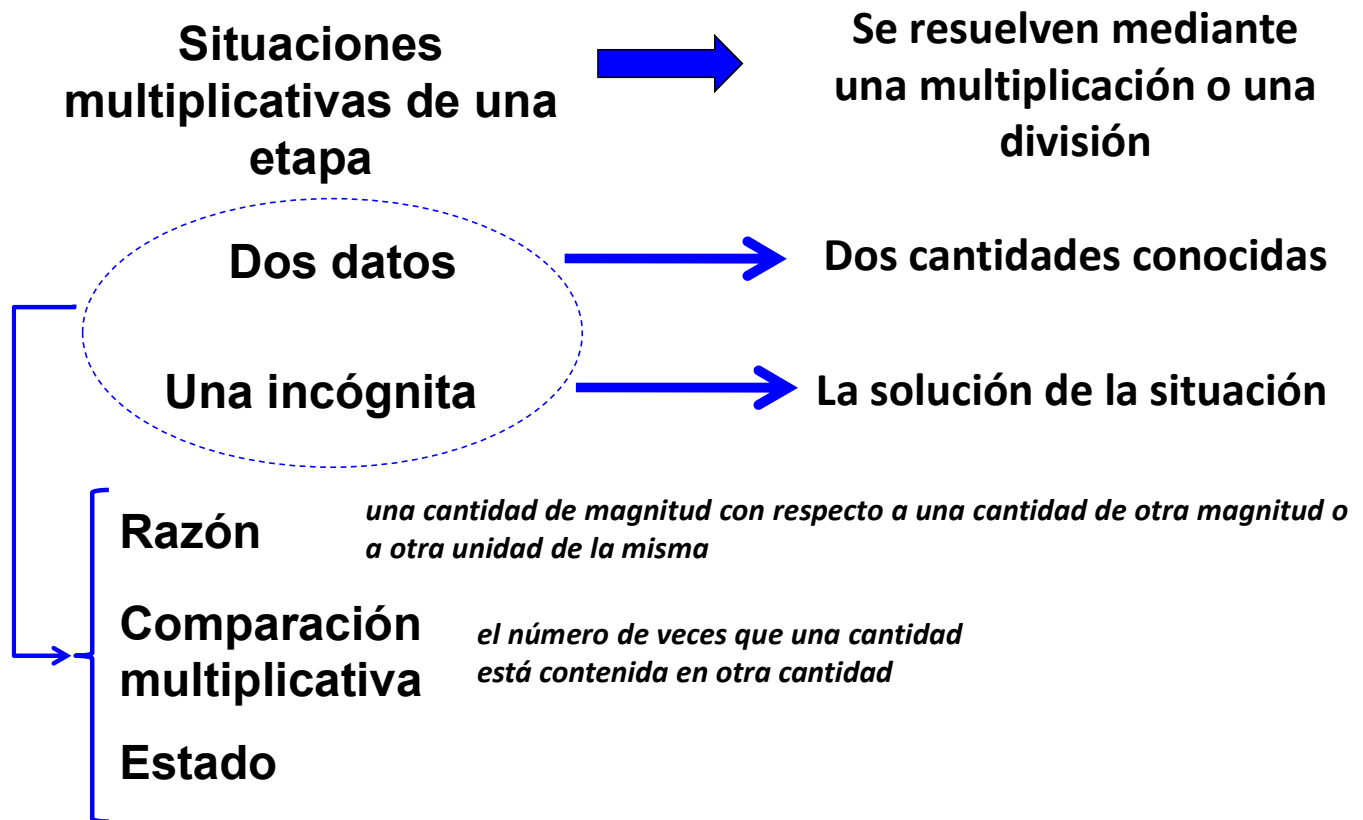
Tarea 1. Inventa un problema que se resuelva mediante una multiplicación.

Tarea 2. Inventa un problema que se resuelva mediante una división.

- ¿El problema se resuelve mediante un reparto o un agrupamiento?

- ¿Es esta división exacta?

Estructura semántica de las situaciones que dan significado a las operaciones de $*$ y $/$



Estructura semántica de las situaciones que dan significado a las operaciones de $*$ y $/$

1 Marca en cada caso la pregunta que se resuelve con dos operaciones.



- Mi prima tiene 5 álbumes con 345 fotografías en total. Yo tengo 3 veces más fotografías que ella.
 - ☐ ¿Cuántos álbumes tiene mi prima?
 - ☐ ¿Cuántas fotografías tenemos entre los dos?
 - ☐ ¿Cuántas fotografías hay en cada álbum?

• Una garrafa de aceitunas vale 9 euros. Una garrafa de aceite vale el doble. Si compro 5 garrafas de aceite:

- ☐ ¿Cuántos litros de aceite tendré?
- ☐ ¿Cuántas garrafas de aceitunas tendré que comprar?
- ☐ ¿Cuánto tendré que pagar en total?



1 Comprueba, realizando las operaciones, si las siguientes conversaciones tienen sentido.



Ayer me compré 3 cómics que costaban 12 € cada uno. Pagué con un billete de 50 €.

Entonces, te devolvieron 24 €.



Estado – Razón – Estado (ERE)

Incógnita en el Estado 2 (E_2). Se resuelven con una multiplicación.

Incógnita en la razón (R). Se resuelven con una división (**situación de reparto**)

Incógnita en el Estado 1 (E_1). Se resuelven con una división (**situación de agrupamiento**)

Estado – Comparación – Estado (ECE)

Es una situación en la que intervienen dos estados E_1 y E_2 que hacen referencia a una misma magnitud y una comparación C que indica el **número de veces que hay que repetir** uno de los estados para igualarlo al otro.

Ejemplo: María tiene 25 euros y su hermana Soledad 100. ¿Cuántas veces más dinero tiene Soledad que María?

Estado – Estado – Estado (EEE)

Ejemplo

Un restaurante ofrece menús compuestos por un primer plato y un segundo plato. Si se puede elegir entre 4 primeros platos y 3 segundos platos, ¿cuántos menús diferentes ofrece el restaurante?

Estado: 4 primeros platos

Estado: 3 segundos platos

Estado: ¿? menús diferentes (primer y segundo plato)

Razón – Razón – Razón (RRR)

Ejemplo:

Un empleado trabaja 100 horas cada mes. Si trabaja 4 horas cada día, ¿cuántos días trabaja cada mes?

Razón: 100 horas cada mes $\rightarrow$ 100 horas/mes

Razón: 4 horas cada día $\rightarrow$ 4 horas/día

Razón: ¿? días cada mes $\rightarrow$ ¿? días/mes

Comparación – Comparación – Comparación (CCC)

Ejemplo:

Pedro tiene seis veces las canicas de Miguel y el doble de canicas de Paco. ¿Cuántas veces de más o de menos tiene Paco las canicas de Miguel?

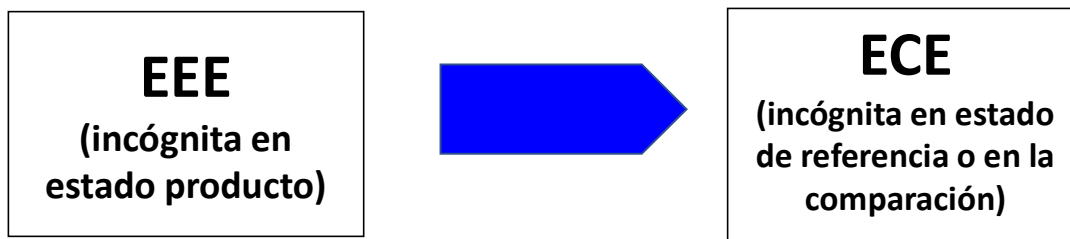
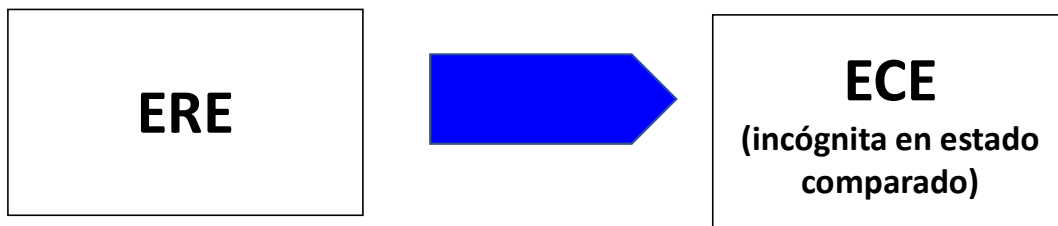
Comparación: 6 veces más que dinero de Miguel

Comparación: 2 veces más que dinero de Paco

Comparación: ¿? veces más o menos que dinero Miguel

Orden de dificultad

Primero introducir en el aula ...



Finalmente



¿Qué hacemos en el aula?

- ❏ Proponer a los alumnos problemas **estereotipados** y **no estereotipados** atendiendo a la dificultad de las clasificaciones semánticas, el rango numérico de los datos y el grado de contextualización.
- ❏ **Asegurarse** que los alumnos **comprenden** el enunciado del problema.
- ❏ Proveer al alumno de **materiales** manipulativos para que modelice el problema, es decir, que reproduzca las acciones del problema.
- ❏ Si consigue **modelizarlo** podemos encontrarnos con dos situaciones:
 - 1º) lo resuelve mediante un **conteo** pero no establece relación con la operación aritmética.
 - 2º) lo resuelve e identifica la **operación** aritmética.

NO hay métodos mágicos para que los alumnos aprendan a resolver problemas aritméticos

- ☞ La resolución de problemas aritméticos es un objetivo a largo plazo que abarca toda la etapa de Primaria y continúa en Secundaria.
- ☞ La identificación de la operación es el último paso de este proceso, y no el primero como piensan los alumnos.
- ☞ Además de proponer problemas cuidadosamente graduados en orden creciente de dificultad hay que dejar tiempo a los alumnos para que entiendan el enunciado, modelicen el problema y lo resuelvan, por métodos informales, hasta que sean capaces de identificar la operación.

Divisibilidad. Mínimo común múltiplo y Máximo común divisor.

Divisibilidad

Tarea 1. Calcula los divisores del número 24 con el único apoyo de unos polícubos



Tarea 2. ¿Cómo introducirías el cálculo de los divisores de un número en el aula?

Divisibilidad

3 Lee, calcula y responde.

Carla compra bolitas de colores para hacer collares.



- Ha utilizado las bolas azules para hacer collares con el mismo número de bolas y no le ha sobrado ninguna. ¿Cuántas bolas ha podido poner en cada uno?

Rodea las posibles respuestas.



- Con las bolas rojas ha hecho collares con el mismo número de bolas y le han sobrado 5 bolas. ¿Cuántas bolas ha podido poner en cada uno?

Rodea las posibles respuestas.



- Con las bolas verdes ha hecho collares con más de 3 bolas y menos de 7 bolas cada uno. Si no le ha sobrado ninguna bola, ¿cuántas bolas ha podido poner en cada collar?

Tarea 1. ¿Existe una única solución a esta tarea?

Tarea 2. ¿Cómo introducirías esta actividad en el aula?

Tarea 3. ¿Qué harías para mejorar la propuesta del libro de texto?

Divisibilidad

Tarea 1. ¿Cómo introducirías el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor en el aula?

Tarea 2. ¿Qué conocimientos matemáticos previos considerarías esenciales tener adquiridos previamente?

Tarea 1. Diseña una actividad en la que se encuentre involucrado el m.c.m, y en la que para su resolución los alumnos empleen como material las regletas de Cuisenaire.



<https://www.geogebra.org/m/XPWwr4h2>

<https://www.cokitos.com/regletas-de-cuisenaire-online/play/>

Tarea 2. Diseña una actividad en la que se encuentre involucrado el M.C.D., y en la que para su resolución los alumnos empleen como material fichas de parchís y bolsas de plástico transparente.

Tarea 3. ¿Cuántas maneras conoces de calcular el MCD?

Fracciones

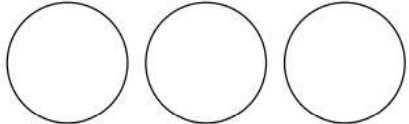
Fracciones

- La fracción como resultado de la medida de una cantidad de magnitud.
- La fracción y la notación decimal con significado de reparto igualitario.
- La fracción como razón y proporcionalidad aritmética entre magnitudes.

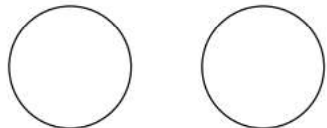


Fracciones. Reparto igualitario

Se reparten, en partes iguales, 3 pizzas entre 4 personas. Indicar la cantidad de pizza que recibe cada una de ellas.

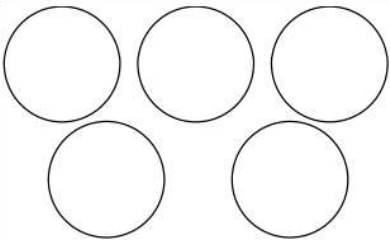
Forma gráfica	Formas habladas	Formas simbólicas
		

Se reparten, en partes iguales, 2 pizzas entre 5 personas. Indicar la cantidad de pizza que recibe cada una de ellas.

Forma gráfica	Formas habladas	Formas simbólicas
		

Fracciones. Reparto igualitario

Se reparten, en partes iguales, 5 pizzas entre 3 personas. Indicar la cantidad de pizza que recibe cada una de ellas.

Forma gráfica	Formas habladas	Formas simbólicas
		

Dos repartos igualitarios si en ambos repartos las personas reciben la misma cantidad de magnitud (en este caso, pizza).

Fracciones. Reparto igualitario

- i) Reparto en varias fases: a cada individuo se le da una determinada cantidad, la que se considere oportuno; si queda alguna cantidad por repartir se reitera el proceso, y así sucesivamente hasta que se agote la cantidad disponible.
- ii) Reparto en una sola fase: cada una de las a unidades se fraccionan en b partes iguales. Cada persona recibe a partes de tamaño $1/b$ de unidad.

→ Suma de repartos

→ Resta de repartos

→ Multiplicación de un natural por un reparto (n repartos)

→ División de un natural por un reparto (reparto de reparto).

Fracciones. Razón

Magnitudes son directamente proporcionales.

- Plenamente definidas dichas cantidades de magnitud.
- Existir una condición de regularidad entre las cantidades implicadas (constante la relación entre una unidad de una de las magnitudes y la cantidad correspondiente de la otra magnitud).

→ La razón también puede ser expresada como expresión decimal.

→ Habitual expresar como porcentaje o escala.

Fracciones. Razón

Situaciones en las que existe proporcionalidad directa:

- Problemas de comparación.

Cuatro cantidades de dos magnitudes directamente proporcionales y se pregunta sobre cuál de las dos situaciones es más favorable o desfavorable. (Cuantitativa y cualitativa)

- Problemas de valor perdido

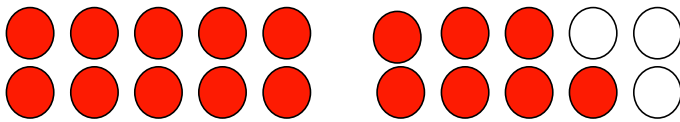
Información sobre una razón en un contexto determinado
Se asume que son magnitudes directamente proporcionales, y se pregunta por la medida de una de las cantidades de una magnitud si varía la otra cantidad de magnitud.

Técnicas de cálculo oral

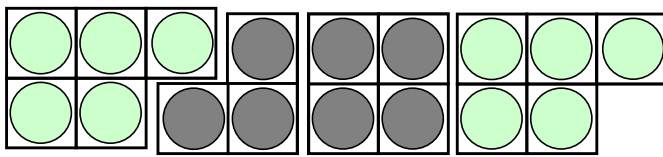
Construcción de la tabla de la suma

👉 Los alumnos de primer y segundo ciclo no suelen tener memorizada la tabla de la suma. Para hacer sumas o restas de una cifra ($8+9$ ó $9-5$) necesitan utilizar los dedos y contar de uno en uno.

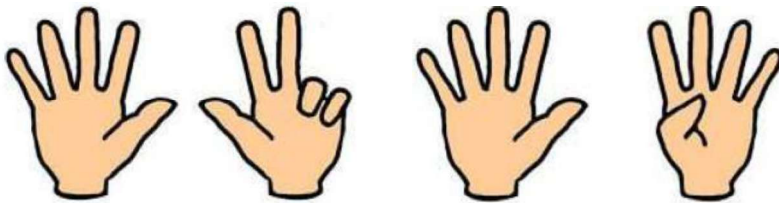
👉 No utilizan técnicas básicas como descomponer los números entre 6 y 10 como suma de 5 y otro número menor o igual que cinco.



Configuraciones puntuales
o ábaco



Regletas Herbinière-Lebert



Dedos de las manos

Memorización de la tabla de la suma

- Conmutar términos
- Buscar los dobles
- Completar a diez o a cinco
- Sumar en vez de restar

Memorización de la tabla de multiplicar

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1 2 3 4 5 6 7 8 9

<https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Product-Game/>

Técnicas de cálculo oral (suma y resta)

$$29 + 99$$

$$66 + 28$$

$$66 + 28$$

$$518 - 268$$

Conmutación de términos

Omisión de ceros finales

Descomposición de términos

Compensación de términos

Técnicas de cálculo oral (multiplicación y división)

$$25 \times 99$$

$$14\ 140 : 70$$

Conmutar factores

Omisión de ceros finales

Descomposición

Factorización

Compensación

Un profesor propone a sus alumnos de cuarto curso de Educación Primaria el siguiente problema:

«Si empaquetas 380 tornillos en cajas de 120 tornillos, ¿cuántas cajas llenas?, ¿quedan tornillos sueltos?, ¿cuántos?»

El alumno A escribe:

	3	8	0		1	2	0
-	3	6			3		
		2					

y explica que el cociente son las 3 cajas y 2 son los tornillos que quedan sueltos.

El alumno B, primero escribe: $380 : 10 = 38$ y $120 : 10 = 12$, y $38 : 2 = 19$ y $12 : 2 = 6$, y después:

	1	9		6	
-	1	8		3	
		1			

y explica que el cociente son las 3 cajas y que queda suelto un tornillo.

Patrones

Patrones

1	2	3	4	5					11						17
1	3	5		9						23					

2	4	6	8	10					22						34
3	6	9		15						36					

Patrones

1	2	3	4	5	a	b	11	c	d	e	17
1	3	5	f	9	g	h	i	23	j	k	l

- 0. No reconoce ni un solo patrón numérico (campos a, f y g rellenos incorrectamente).
- 1.A Reconoce solo un patrón numérico (es decir, todo el primer fragmento de la primera o segunda fila).
- 1.B Reconoce ambos patrones numéricos (es decir, todo el primer fragmento es correcto).
- 2.A Reconoce el patrón numérico y lo continúa en el segundo fragmento solo en la primera fila.
- 2.B Reconoce el patrón numérico, lo continúa y aplica la regla del patrón en el tercer fragmento de la primera fila.
- 2.C Reconoce la regla del patrón y lo continúa en el tercer fragmento de la primera fila y en el segundo fragmento de la segunda fila.
- 3. Reconoce la regla del patrón en cada patrón, completa el elemento que falta y aplica la regla del patrón para crear el patrón de la segunda fila del tercer fragmento.

Patrones

1	2	3	4	5		
1	3	5		9		

		11				
				23		

				17		

2	4	6	8	10		
3	6	9		15		

		22				
				36		

				34		

Patrones

Un pequeño restaurante tiene 30 mesas cuadradas pequeñas. En cada mesa se puede sentar solamente una persona en cada lado. Si se colocaran todas las mesas juntas, ¿cuántas personas se podrían sentar? ¿Y si el restaurante tuviese 50 mesas? ¿Y si tuviese 100? ¿Y si tuviese 2000?



Patrones

Número de mesas	Número de personas
10	
11	
12	
13	
14	
n	

