EL SENTIDO DE LA MEDIDA

Antonio M. Oller Marcén

Departamento de Matemáticas – IUMA, Universidad de Zaragoza

oller@unizar.es

Plan de formación de asesores ARCOMAT

15 de septiembre de 2025

PRÓLOGO

EL SENTIDO DE LA MEDIDA A VISTA DE PÁJARO (MIOPE)

Las matemáticas como elemento cultural.

Las matemáticas son una parte de la cultura de la humanidad que surge y se desarrolla alrededor de seis actividades básicas (Bishop, 1991):

Contar
Medir
Localizar
Diseñar
Jugar
Explicar

Terminología del NCTM:

- Contenidos.
- Procesos.

Terminología del currículo:

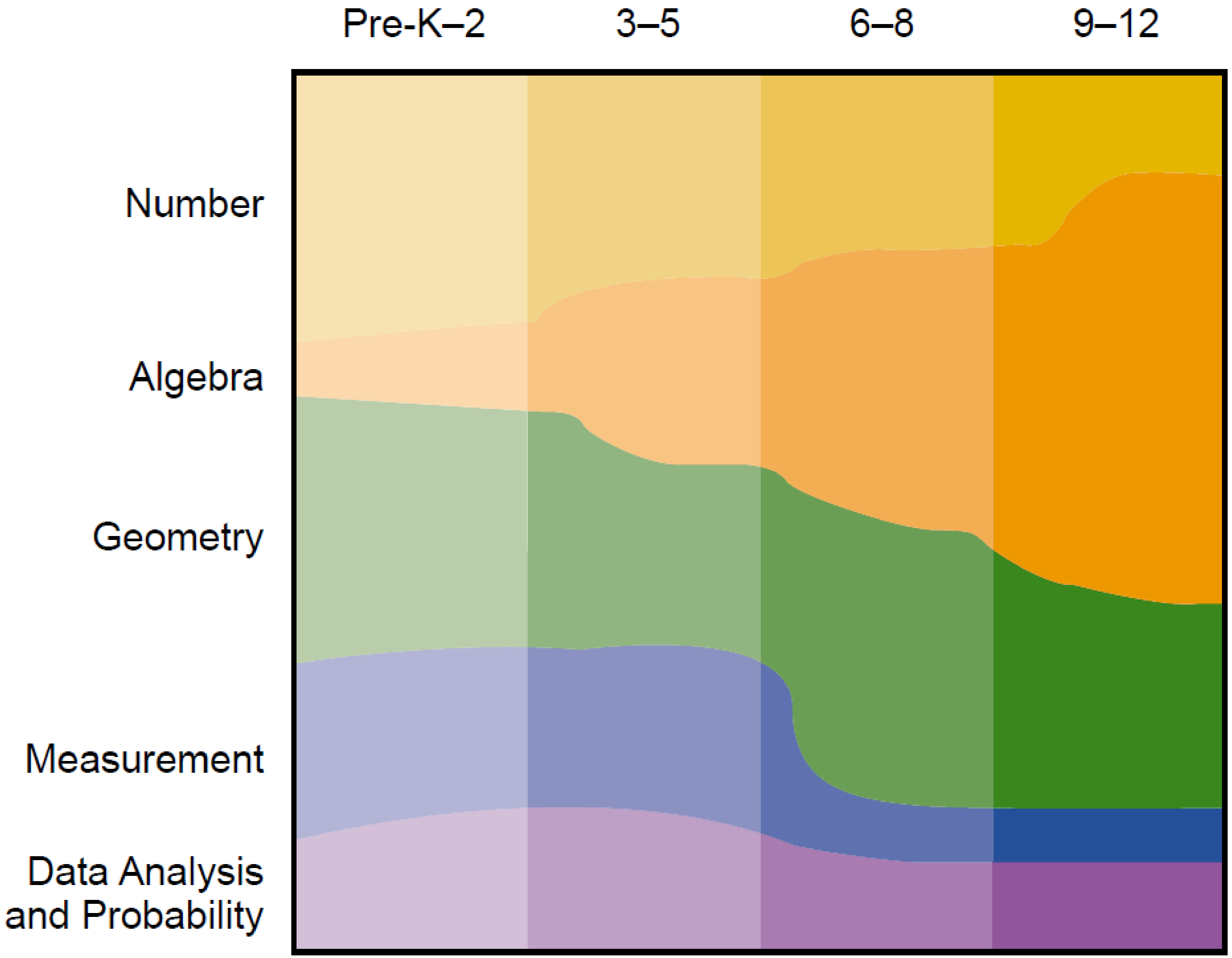
- Sentidos y saberes básicos.
- Competencias específicas.

Elementos que constituyen el sentido de la medida

En el NCTM:

- ✓ Comprender atributos mensurables de los objetos, así como las unidades, sistemas y procesos asociados a la medición.

- ✓ Aplicar las técnicas, herramientas y fórmulas apropiadas para determinar medidas.



(NCTM, 2000, p. 30)

Los distintos bloques de contenido, o sentidos, reciben distinta atención a lo largo de los distintos niveles educativos.

El sentido de la medida parece perder peso tras la primaria.

No desaparece.

Elementos que constituyen el sentido de la medida

En el currículo aragonés actual:

<table>
<tr><th></th><th>Infantil</th><th>Primaria</th><th>E.S.O.
1º - 3º</th><th>E.S.O.
4º</th><th>Bachillerato</th></tr>
<tr><td>Magnitud</td><td>X</td><td rowspan="2">X</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Medición</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Estimación y relaciones</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Cambio</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td>X</td></tr>
</table>

Conexiones intramatemáticas del sentido de la medida

La fracción como resultado de una medida.

La fracción como reparto.

Representación decimal.

Problemas métricos con figuras y cuerpos geométricos.

Razones trigonométricas.

Sentido espacial

Sentido numérico

Medir Magnitudes

Sentido algebraico

Proporcionalidad entre magnitudes.

Razón de cambio.

Áreas por debajo de una curva.

Sentido estocástico

La probabilidad como “medida” de la incertidumbre

El problema de la coherencia

Coherencia curricular: Schmidt et al. (2005)

Tienes que ver con la secuenciación de los contenidos disciplinares teniendo en cuenta distintos niveles dentro de un curso específico o entre cursos.

Coherencia instruccional: Cai et al. (2014).

Tiene más que ver con el tratamiento en el aula de contenidos conectados o de un mismo contenido que se aborda desde varios puntos de vista diferentes.

La falta de coherencia es fuente de obstáculos didácticos y refuerza los obstáculos epistemológicos.

El problema de la coherencia

Una **razón** entre dos números, a y b, es el cociente $\frac{a}{b}$.

La razón entre dos números vuelve a ser un número.

Operación interna.

Llamamos **razón de dos segmentos**, AB y CD, al número que resulta de dividir la longitud del segmento AB entre la longitud del segmento CD.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = r \longleftarrow \text{Razón}$$

La razón entre dos segmentos no es un segmento, sino un número.

Operación externa.

El problema de la coherencia

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** si, al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por ese mismo número.

"Ser (directamente) proporcional" se define como una relación entre magnitudes

Los **segmentos** *AB* y *CD* son **proporcionales** a *EF* y *GH*, si la razón de *AB* y *CD* es igual a la razón de *EF* y *GH*.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = r$$

"Ser proporcional" se define como una relación entre pares de segmentos.

El plan para hoy

- Prólogo.
- Infantil y primaria: Construcción de la noción de magnitud y la medida de magnitudes.
- Primaria: Dotando de sentido a la fracción a partir de los procesos de medida.
- Secundaria: Áreas de figuras planas.
- Bachillerato: El límite y más allá.
- Epílogo.

PRIMERA PARTE

CONSTRUYENDO LA NOCIÓN DE MAGNITUD Y LOS PROCESOS DE MEDIDA DE CANTIDADES DE MAGNITUD

¿Qué es una magnitud?

Roanes Macías (1976, p. 402):

> “*Una magnitud es un semigrupo conmutativo y ordenado*”.

Freudenthal (1973, p. 198):

> “*Una magnitud es un conjunto no vacío dotado de una relación de orden* ($<$) *y de una adición* ($+$) *de forma que:*
> - *Dados a y b, o bien* $a<b$, *ó* $a=b$, *ó* $b<a$.
> - *Si* $a<b$ *y* $b<c$, *entonces* $a<c$.
> - $(a+b)+c=a+(b+c)$.
> - $a+b=b+a$.
> - *Si* $a+c=b+c$, *entonces* $a=b$.
> - $a<b$ *si y sólo si existe c tal que* $a+c=b$.”

¿Qué aportan estas deficiniones a un docente?

¿Qué es una magnitud en el aula?

Los objetos tienen características.

Nº de referencia. Color. Precio. Peso. Nº de plazas.

Fondo. Material. Largura. Volumen. Estilo.

¿Qué es una magnitud en el aula?

Los objetos tienen características.

- Todas permiten hacer comparaciones (igualdad o no).
- Algunas permiten hacer ordenaciones cuantitativas.
- De ellas, algunas admiten ver "cuántas veces un objeto *cabe* en el otro".

Estas últimas son las que consideramos magnitudes

Nº de referencia.	Color.	**Precio.**	**Peso.**	**Nº de plazas.**
Fondo.	Material.	**Largura.**	**Volumen.**	Estilo.

Magnitudes en el currículo aragonés

En Educación Infantil:

Primer ciclo:

- Exploración de objetos y materiales a través de los sentidos.
- Identificación de las cualidades o atributos de los objetos y materiales. Efectos que producen diferentes acciones sobre ellos.

Segundo ciclo:

- Cualidades o atributos de los objetos. Relaciones de orden, correspondencia, clasificación y comparación.
- El tiempo y su organización.

Magnitudes en el currículo aragonés

En Educación Primaria:

Primer ciclo:

- Atributos mensurables de los objetos (longitud, masa, capacidad), distancias y tiempos.
- Conservación de la cantidad de magnitud de interés en una situación concreta.

Segundo ciclo:

- Atributos mensurables de los objetos (longitud, masa, capacidad, superficie, volumen y amplitud de ángulo).
- Medida del tiempo.

Magnitudes en el currículo aragonés

<u>En Educación Secundaria Obligatoria</u>:

Primer, segundo y tercer curso:

- Atributos mensurables de los objetos físicos y matemáticos: investigación y relación entre los mismos.

<u>En Bachillerato</u>:

No hay un trabajo específico sobre el concepto de magnitud.

¿Qué magnitudes se trabajan en el aula?

Educación infantil:

Longitud, **capacidad**, **peso**, tiempo.

Educación primaria:

Longitud, superficie, **volumen**, amplitud de ángulo, **masa**, tiempo.

Educación secundaria y bachillerato:

Magnitudes de la física y abstractas.

Tipos de magnitudes

Magnitudes extensivas (o sumables):

La cantidad de magnitud de un objeto compuesto de partes se obtiene agregando las cantidades de cada parte.

Magnitudes intensivas:

Aunque tiene sentido agregar los objetos, la cantidad de magnitud del objeto agregado no es la suma de la de cada parte.

¿Ejemplos?

Tipos de magnitudes

El tipo de magnitud tiene impacto en su aprendizaje:

- ✓ Las magnitudes extensivas son más fáciles de "percibir".
- ✓ Los procesos de medida asociados son diferentes.

Las magnitudes que se trabajan de forma específica desde las matemáticas en el currículo de infantil y primaria son sumables.

¿Qué es la longitud?

En un par de minutos, dad una definición personal de la magnitud ‘longitud’.

En otro par de minutos, dad una definición personal del concepto de ‘distancia’.

¿Qué es la longitud? (RAE)

longitud

Artículo

Sinónimos o afines

Del lat. *longitūdo.*

1. f. Magnitud física que expresa la distancia entre dos puntos, y cuya unidad en el sistema internacional es el metro.

2. f. Mayor dimensión lineal de una superficie plana.

distancia

Artículo

Sinónimos o afines

Antónimos u opuestos

1. f. Espacio o intervalo de lugar o de tiempo que media entre dos cosas o sucesos.

   SIN.: **separación**, **espacio**, **longitud**, **trayecto**, **recorrido**, **camino**, **trecho**.

2. f. Diferencia, desemejanza notable entre unas cosas y otras.

   SIN.: **diferencia**, **desigualdad**, **separación**, **discrepancia**, **desemejanza**.

   ANT.: **semejanza**, **afinidad**.

3. f. Alejamiento, desvío, desafecto entre personas.

   SIN.: **desafecto**, **alejamiento**, **separación**, **desamor**, **desvío**, **frialdad**.

   ANT.: **acercamiento**, **cordialidad**.

4. f. *Geom.* Longitud del segmento de recta comprendido entre dos puntos del espacio.

5. f. *Geom.* Longitud del segmento de recta comprendido entre un punto y el pie de la perpendicular trazada desde él a una recta o a un plano.

¿Qué es la longitud? (Gemini)

hola. Puedes definir la magnitud longitud?

Ver razonamiento

Claro. La **longitud** es una **magnitud física fundamental** que expresa la distancia entre dos puntos en el espacio. 📏

En otras palabras, es la cantidad de espacio que hay entre un punto y otro. Se utiliza para medir dimensiones como el alto, el ancho, el largo o la profundidad de un objeto, así como la distancia que separa dos cuerpos.

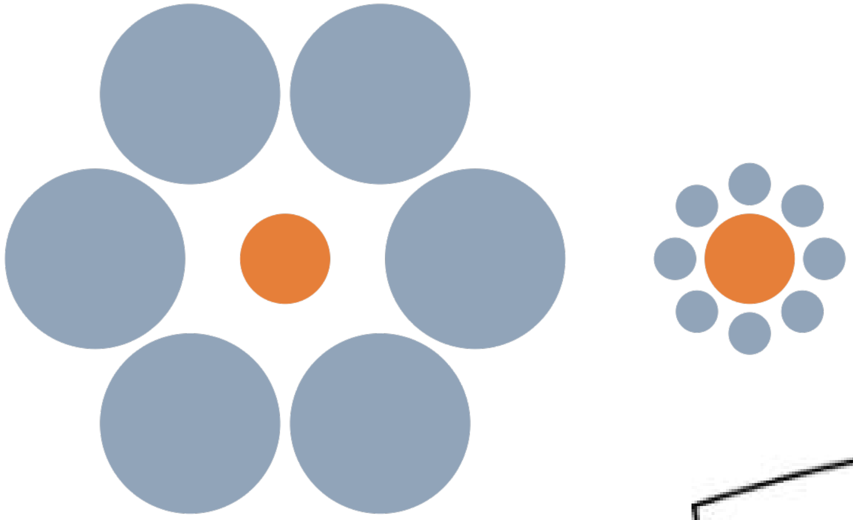
¿Cómo definimos las distintas magnitudes?

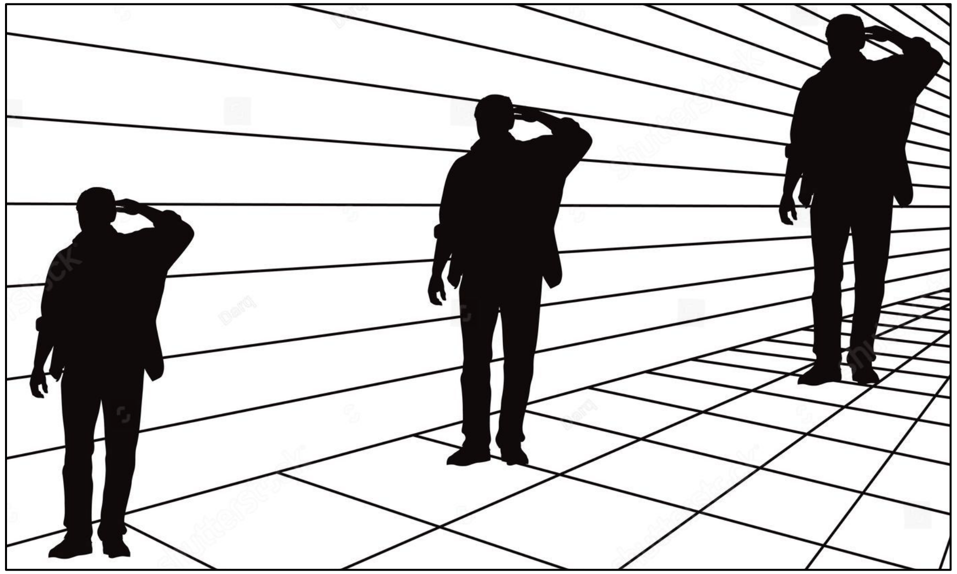
Es difícil explicar con palabras de forma relativamente satisfactoria lo que es “la longitud”, “la masa”, “el tiempo”, etc.

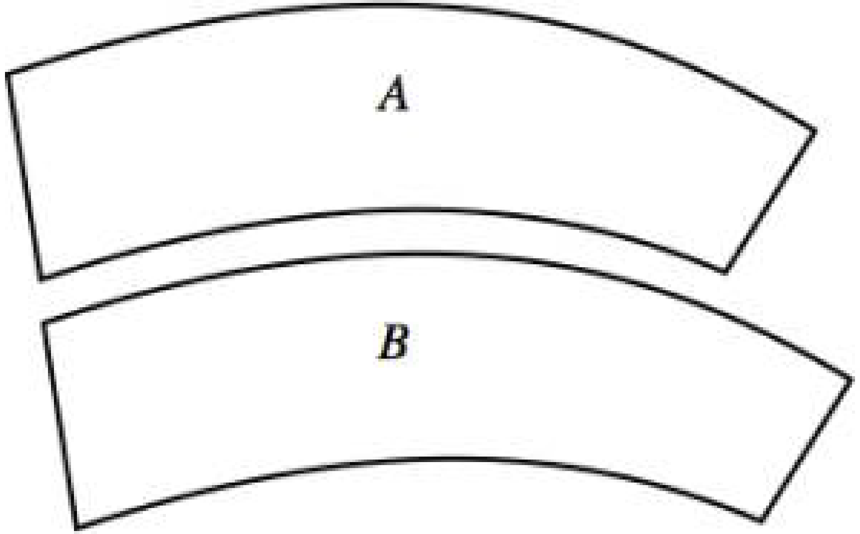
Quizás no es tan difícil percibir la longitud de un objeto, su masa, el tiempo que dura una clase.

Pero… puede haber problemas.

¿Cómo definimos las distintas magnitudes?

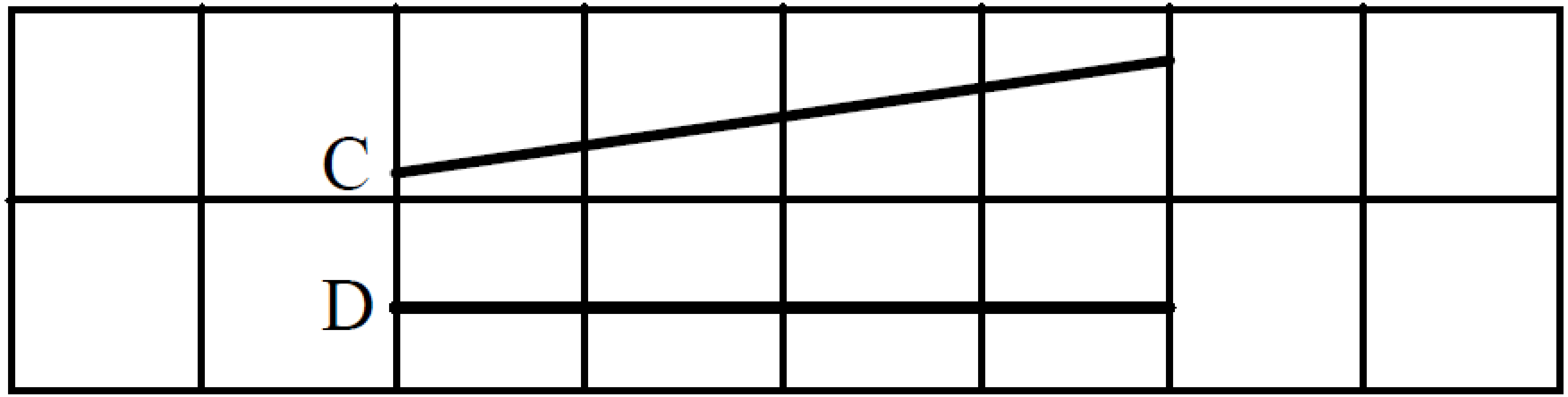






¿Cómo definimos las distintas magnitudes?

CSMS Project



	12 años	13 años	14 años
C es más larga	42%	45%	52%
D es más larga	0%	1%	0%
Son igual de largas	48%	48%	45%
No se puede saber	4%	2%	1%

¿Cómo definimos las distintas magnitudes?

Identificación de unas magnitudes con otras.

Falsa relación entre magnitudes.

Longitud y distancia

¿Cuál es la distancia entre Zaragoza y Huesca?

¿Esta pregunta tiene que ver con las matemáticas?

¿En qué nivel educativo se puede plantear?

¿Qué competencias se estarían poniendo en juego?

Magnitudes

Operaciones fundamentales en las que se basa el proceso de medida: Conservación y transitividad.

<u>Conservación:</u>

Decimos que un niño "conserva una magnitud" cuando éste ha adquirido la idea de que, aunque el objeto cambie de posición, forma, tamaño o alguna otra propiedad, hay algo que permanece constante. Ese algo es, precisamente, aquella magnitud con respecto a la cual pretendemos que el niño sea "conservador".

Magnitudes

Operaciones fundamentales en las que se basa el proceso de medida: Conservación y transitividad.

<u>Conservación:</u>

Magnitudes

Operaciones fundamentales en las que se basa el proceso de medida: Conservación y transitividad.

Transitividad:

La propiedad transitiva de las cantidades de magnitud nos dice que, si un objeto A tiene una cantidad de magnitud igual a la de un objeto B y, a su vez, la cantidad de magnitud del objeto B es igual a la cantidad de magnitud de un tercer objeto C, entonces los objetos A y C tienen la misma cantidad de magnitud.

Medir cantidades de magnitud

- Después de constatar que los objetos tienen distintas cantidades de magnitud y poder compararlas, podemos decidir elegir una de ellas y utilizarla como “patrón de referencia”.
- De esta manera, comparamos cualquier otra cantidad de magnitud con esta “referencia” que hemos elegida.
- No nos conformamos con ver cuál es mayor o menor. Queremos saber “cuántas veces” mayor o menor es la cantidad de magnitud dada con respecto a la “referencia” elegida.
- Queremos cuantificar la cantidad de magnitud.

Medir cantidades de magnitud

Medidas directas – Medidas indirectas

Técnicas de medida directa:

Comparación directa con una unidad “por superposición”.

Técnicas de medida indirecta:

Se hace uso de algún tipo de relación entre dos magnitudes de “distinta naturaleza”.

Subyace una idea (quizás implícita) de función.

Medir cantidades de magnitud

Técnica de medida directa.

1º. Se elige la magnitud a medir. Es necesario identificar la magnitud a trabajar y eliminar los atributos irrelevantes.

2º. Se elige o construye otro objeto: la unidad.

3º. Se compara la unidad con la cantidad de magnitud del objeto a medir, contando cuántas unidades son necesarias para cubrir o componer la cantidad de magnitud a medir.

4º. El resultado de la medida es un número acompañado de la referencia a la unidad.

5º. Decisión del grado de precisión de la medida.

Medir cantidades de magnitud

Técnica de medida indirecta.

Las magnitudes intensivas (que no son sumables) se miden necesariamente por métodos indirectos: temperatura, velocidad.

Utilizar un instrumento de medida no implica estar realizando una medida indirecta.

A veces algunas magnitudes extensivas se miden de manera indirecta por simplicidad o tradición: fórmulas de áreas y volúmenes, áreas de campos medidas en jornadas o fanegas (volumen), etc.

Medir cantidades de magnitud

Abusos de lenguaje.

“Vamos a medir la mesa”.

“Vamos a usar este bolígrafo como unidad”.

“Esta caja es más grande que esa otra”.

“Una garrafa de 5 litros”.

¿Cómo corregimos estos enunciados?

Magnitudes y su medida

Estadios evolutivos en el aprendizaje de las magnitudes y su medida

1. Estadio de la comparación perceptiva directa.
2. Estadio de la comparación por desplazamiento de objetos.
3. Estadio de la medida con unidades objetales.
4. Estadio de la medida con unidades convencionales.

Magnitudes y su medida

Estadios evolutivos en el aprendizaje de las magnitudes y su medida: Comparación perceptiva directa.

- El niño empieza a reconocer ciertas propiedades de los objetos y a ser capaz de centrarse en una de ellas para compararla con la misma propiedad en otros objetos.
- Percepciones directas y globales, visuales. Por ejemplo:
  - ✓ No tiene en cuenta el efecto óptico del alejamiento de un objeto sobre su tamaño aparente.
  - ✓ No tiene en cuenta si un objeto está a distinta altura que otro para valorar cuál es más alto.
- No siente la necesidad de acercar los objetos o utilizar un término medio de comparación.
- Es incapaz de aplicar con significado instrumento de medida alguno.
- No comprende la idea de reiteración o subdivisión de una unidad para medir.

Magnitudes y su medida

Estadios evolutivos en el aprendizaje de las magnitudes y su medida: Comparación por desplazamiento de objetos.

- Desplaza objetos hasta ponerlos uno al lado del otro y al mismo nivel, trasvasa líquidos, sopesa…
- Conservación: Empieza a asumir que no todas las transformaciones que sufre un objeto afectan a su cantidad de magnitud.
- Utiliza la propiedad transitiva de las cantidades de magnitud: si se le impide acercar los objetos a comparar, busca un término medio de comparación transportable de uno a otro objeto.
- Inicialmente hace las comparaciones con partes del propio cuerpo pasando a adoptar un objeto simbólico que se desplaza de uno de los elementos a comparar hacia el otro, inicio de la idea de unidad de medida.

Magnitudes y su medida

Estadios evolutivos en el aprendizaje de las magnitudes y su medida: Medida con unidades objetales.

- Ya es capaz de contar cuántas veces cabe la cantidad de magnitud de ese término medio en cada una de las cantidades de magnitud de los objetos a comparar, es decir, el niño empieza a medir, pero:
- No controla bien las acciones de "juntar objetos" que le van a permitir sumar las unidades de magnitud:
  - ✓ No coloca una unidad inmediatamente tras otra.
  - ✓ No se preocupa porque las unidades sean las mismas.
- En este estadio el niño elige las unidades muy ligadas al objeto a medir ("unidades objetales"): si tiene que medir una varilla elegirá otra varilla como unidad antes que, por ejemplo, una cinta, aun cuando esta última permita una medición más cómoda.

Magnitudes y su medida

Estadios evolutivos en el aprendizaje de las magnitudes y su medida: Medida con unidades convencionales.

- El niño ya es capaz de llevar a cabo procesos de medida correctos y bastante precisos juntando adecuadamente las unidades y utilizando la misma unidad en cada medición.
- Está familiarizado con las unidades convencionales que utiliza la sociedad y las elige en función de la cantidad de magnitud a medir, no del tipo de objeto.
- Se inician los procesos de partición de la unidad para aproximar mejor la medida.
- También distingue cuáles son los cambios de los objetos que modifican la cantidad de magnitud.
- La medida aparece como la síntesis de “la división en partes” y de la iteración, como transporte de la unidad. Se tendrá como resultado un número.

Magnitudes y su medida

Secuenciación de situaciones de enseñanza.

1. Situaciones de identificación de la magnitud.
2. Situaciones de comparación directa de cantidades de magnitud sin objetos intermedios.
3. Situaciones de comparación cantidades de magnitud con objetos intermedios.
4. Situaciones de ordenación cantidades de magnitud.
5. Situaciones de medida con unidades antropométricas o arbitrarias: de cálculo y de construcción.
6. Situaciones de medida con unidades del Sistema Métrico Decimal.
7. Situaciones para determinar el grado de precisión de la medida.
8. Situaciones de estimación de cantidades de magnitud.

Estimación de cantidades de magnitud

Una posible definición (Pizarro et al., 2014; 2015).

Asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y una unidad correspondiente a una cantidad de magnitud discreta o continua por medio de los conocimientos previos o por comparación no directa con algún objeto auxiliar.

Tres componentes fundamentales:

- Asignar un valor numérico junto a una unidad correspondiente.
- Realizar la tarea perceptivamente.
- Relación de la percepción con los conocimientos previos, en base a un referente.

Estimación de cantidades de magnitud

Características (Segovia et al., 1989).

1. Se debe determinar la medida de una cantidad de magnitud.
2. La persona que realiza la estimación dispone de alguna información, referencia o experiencia con aquello que debe estimarse.
3. La estimación se realiza generalmente de forma mental.
4. Se hace de forma rápida.
5. El valor obtenido no es exacto, pero permite tomar decisiones adecuadamente.
6. Existe una cierta variabilidad en el resultado dependiendo de la persona que realiza la estimación.

Estimación de cantidades de magnitud

Pensad 2 actividades distintas en las que se trabaje la estimación para la magnitud volumen/capacidad.

Pensad cómo podría resolverla un estudiante de 6º curso de Educación Primaria.

Pensad cómo la resolveríais vosotros.

Estimación de cantidades de magnitud

Tipos de situaciones de estimación (Pizarro et al., 2016).

1. Estimación con referentes propios: Se realiza por medio de unidades de medida o medidas de objetos que están internalizadas por el estimador.

2. Estimación con referentes auxiliares: Se realiza por medio de una iteración mental de un objeto auxiliar presente.

3. Estimación indirecta: Se realiza una estimación asignando un valor a una medida por medio de un proceso de modelización de una realidad o fenómeno complejo

Estimación de cantidades de magnitud

Tipos de actividades de estimación (Aydoğdu y Çimen, 2021).

1. Estimación de cantidades de magnitud de objetos físicamente presentes durante la actividad.

2. Estimación de cantidades de magnitud de objetos conocidos para los estudiantes.

3. Estimación de cantidades de magnitud de objetos a través de fotografías.

Estimación de cantidades de magnitud

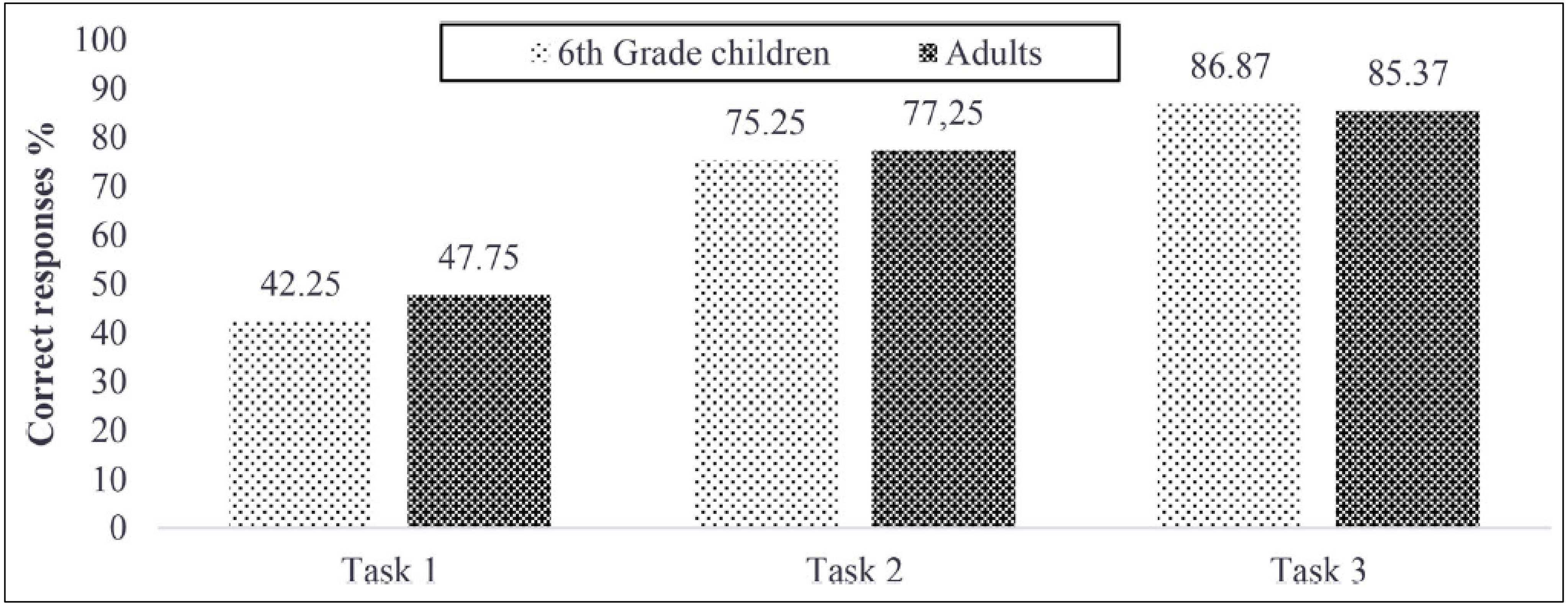
Tareas de estimación del volumen (Desli y Dimitropoulos, 2022).

1. Se muestra un recipiente lleno hasta la mitad (de bloques o de arroz) y se pide estimar la capacidad total.
2. Se muestra un recipiente vacío y se pregunta si una cantidad dada (de bloques o de arroz) cabe dentro.
3. Se muestra una cierta cantidad (de bloques o de arroz) y dos recipientes vacíos. Se debe decidir en cuál de los dos recipientes cabe la cantidad inicial dada.

Tamaño de los recipientes (g/p), transparencia, tipo de cantidad (c/d).

Estimación de cantidades de magnitud

Tareas de estimación del volumen (Desli y Dimitropoulos, 2022).



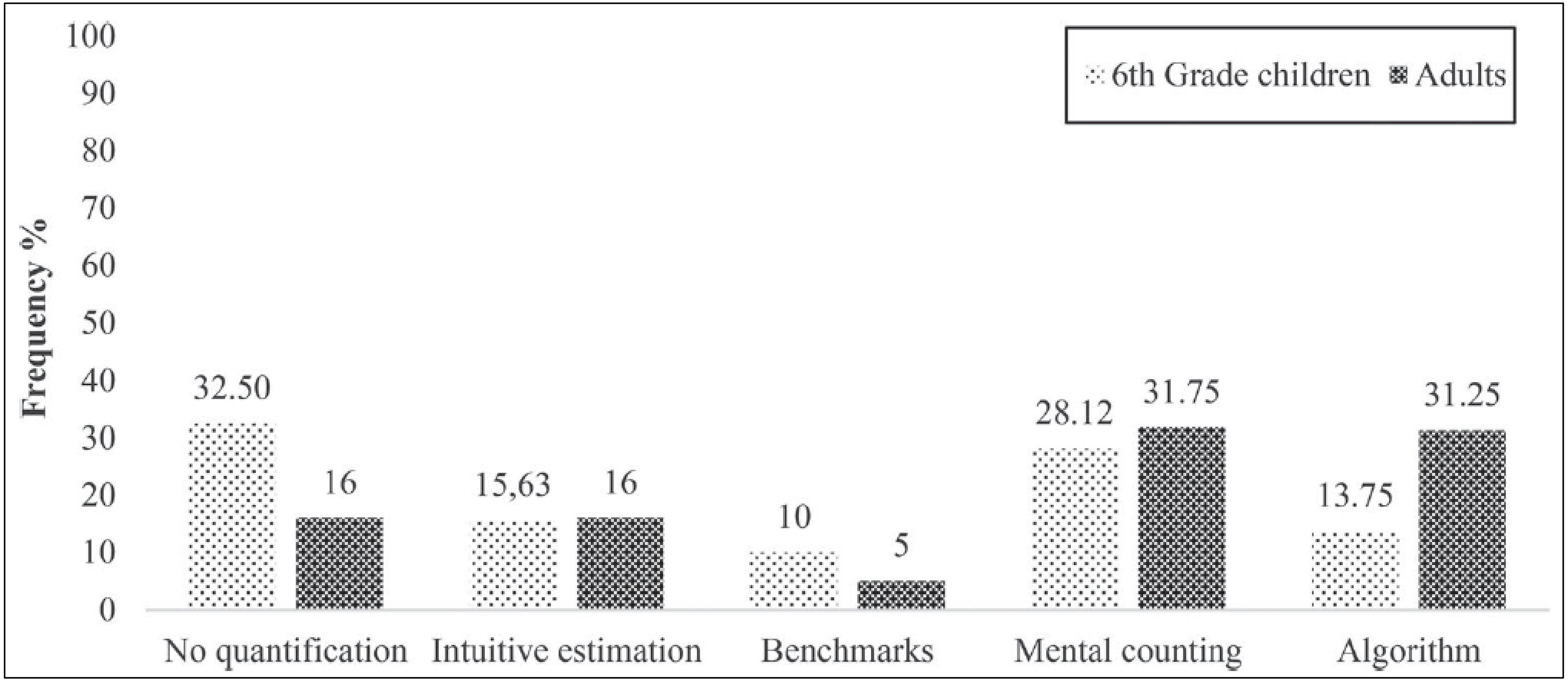
Estimación de cantidades de magnitud

Estrategias de estimación del volumen (Desli y Dimitropoulos, 2022).

1. Dar una estimación sin justificación: “creo que es así”, “me parece que cabe eso”.
2. Estimación intuitiva: “lo he hecho a ojo”, “lo he adivinado”.
3. Estimación basada en el uso de puntos de referencia: “creo que en la mitad caben tres cucharillas, así que harán falta el doble”.
4. Estimación basada en un recuento mental: recuento mental de las unidades que parecen caber dentro de la caja.
5. Estimación basada en el uso de una fórmula.

Estimación de cantidades de magnitud

Estrategias de estimación del volumen (Desli y Dimitropoulos, 2022).

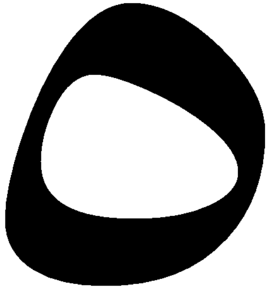


SEGUNDA PARTE

DOTANDO DE SENTIDO A LA FRACCIÓN A PARTIR DE LOS PROCESOS DE MEDIDA DE MAGNITUDES

La fracción: ¿Qué es?

Símbolos frente a conceptos.

5 V  五

$$\frac{12}{9}$$

¿Qué significa esta cosa?

La fracción: Múltiples significados

- La fracción como reparto.
- La fracción como parte-todo.
- La fracción como medida.
- La fracción como cociente.
- La fracción como operador.
- La fracción como razón.

Cada uno de estos significados recoge una faceta relevante del concepto. Todos son necesarios. Todos pueden y deben conectarse.

La fracción: Múltiples significados

Manuel Zubiaur, 1718

"Fracción es una o muchas partes de aquellas en que se considera dividida la unidad [...] la misma razón tiene un quebrado con su entero (que es la unidad) que tiene el numerador al denominador [...] ***las fracciones [...] no son otro que una expresión de la razón que hay entre un todo y alguna o algunas partes suyas***".

La fracción como razón.

CAPITULO PRIMERO.

FRACCION, ò Numero Quebrado, es vna, ò muchas partes de aquellas en que ſe conſidera dividida vna Unidad, como quando dividìmos la Vara en 4. pates iguales; ſi tomàmos vna de eſtas partes, ſerà vn quarto de Vara; ſi tomamos dos, ſeràn dos quartos; y ſi tres, tres quartos: y eſtos ſon Fracciones, ò Quebrados. El modo de eſcri-

De aqui ſe infiere, que la meſma razon tiene vn Quebrado con ſu entero (que es la Unidad (que tiene el Numerador al Denominador: como $\frac{1}{3}$ tiene con la Unidad razon ſubtripla, ò como 1. con 3. Y es la razon,

Primero. El Denominador de vna Fraccion ſiempre vale vn entero; porque no ſignifica otro, que vn entero dividido en partes.

Segundo. Si el Numerador es igual al Denumerador: El Quebrado, vale vn entero; ſi es menor, vale menos; y ſi mayor, mas que vn entero: Como en eſtas Fracciones $\frac{4}{4}$ ò $\frac{1}{1}$ &c.

Tercero. Las Fracciones, ò Quebrados no ſon otro, que vna expreſsion de la razon que ay entre vn todo, y alguna, ò algunas partes ſuyas:

La fracción: Múltiples significados

<u>Manuel Poy y Comes, 1693</u>

"*para hallar el valor de un quebrado multiplíquese el numerador por lo que vale un entero; pártase luego el producto por el denominador*".

La fracción como operador.

52

XLVII.

DE LAS FRACCIONES, O QUEBRADOS *vulgares.*

La fraccion, ò quebrado toma su origen de la particion de un número menor por otro mayor, y así se expresará por dos numeros uno sobre otro con una linea intermedia. El inferior se llama denominador, è indica el entero, ò unidad dividida en partes. El superior se llama numerador, y determina las partes dadas en el caso propuesto; v. g.

Numerador. . . . 3

Denominador. . . 4

XLVIII.

Para hallar el valor de un quebrado multiplíquese el numerador por lo que vale un entero; pártase luego el producto por el denominador, y el quociente indicará el valor del quebrado dado. Si sobra algo por residuo hagase lo mismo; v. g.

La fracción: Múltiples significados

<u>**Fernández de Eyzaguirre, 1606**</u>

“Estos ***quebrados proceden de algunas particiones que se hacen en las cuales sobra alguna cantidad o numero*** y la tal sobra se llama quebrado”.

façil que ſea, eſtos quebrados proceden de algunas par-
ticiones que ſe hazen, en las quales ſobra alguna quanti-
dad, o numero, y la tal ſobra ſe llama quebrado: como
ſi quiſieſes repartir .16. reales entre .5. compañeros, diras
que caue a çada vno .3. reales, y que ſobra vno, el qual
pondras ſiempre encima de vna raya, y el cinco que fue
por el preſente el partidor debaxo, como pareze $\frac{1}{5}$ y aſſi
diras que bale vn quinto de vn real, que junto con lo
que te vino en la particion, haran .3. reales, y $\frac{1}{5}$ que ſera
vna placa, y por tanto a eſte, y ſus ſemejantes llama-
ras quebrados, por quanto ſignifican en ſi alguna parte,
o partes de alguna coſa entera.

La fracción como cociente.

La fracción: Múltiples significados

<u>**Ambrosio Moya, 1867**</u>

"***la operación de medir cantidades*** [...] es lo mismo cabalmente que en la operación de dividir enteros [...] todo número fraccionario es múltiplo de una parte alícuota de la unidad [...] ***quebrado o fracción ordinaria es una totalidad de partes iguales cualesquiera de la unidad***".

La fracción como medida.

170. Para fijar bien el orígen de los números fraccionarios, es preciso observar que, en la operacion de medir cantidades se busca el número de veces que una cantidad contiene á otra: es decir, lo mismo cabalmente que en la operacion de dividir enteros. La cantidad que se mide hace de dividendo; hace de divisor la que sirve de tipo para investigar el número de veces que aquella la contiene; y este número representa el cociente.

Si la division es completa, el cociente es un entero, y expresa tanto en una como en otra operacion las veces que el divisor está contenido en el dividendo: por eso *todo número entero es un múltiplo de la unidad*. Pero si dicha division es incompleta, el resultado no es número entero en ninguna de ellas; y aqui aparece una diferencia muy esencial entre medir y dividir enteros.

Cuando se mide hay que buscar, en este caso, una parte alícuota de la unidad, que se halle contenida varias veces completamente en la cantidad; es decir, una tercera cantidad submúltipla de las otras dos; la cual en unos casos existe y en otros no: los primeros dan orígen á los números fraccionarios, y los segundos á los inconmensurables: por eso *todo número fraccionario es un múltiplo de una parte alícuota de la unidad*, mientras que

172. QUEBRADO ó FRACCION ORDINARIA *es una totalidad de partes iguales cualesquiera de la unidad.*

La fracción: Múltiples significados

Juan Andres, 1515

"Número quebrado no es otra cosa sino número que tiene una parte o dos o tres o muchas partes de un entero y no todas, porque si todas las partes tuviese no sería quebrado sino que sería entero [...] ¾ ***significan las tres partes de cuatro partes de cualquier cosa***".

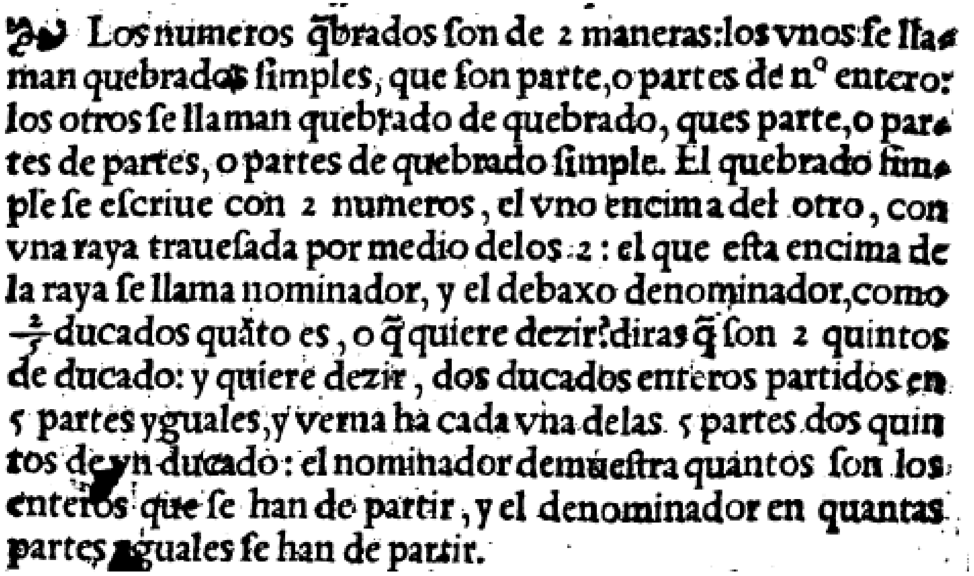
Articulo primero dla difinició del numero q̄brado. y has de saber que numero q̄brado no es otra cosa sino numero q̄ tiene vna parte o dos/o tres/o muchas partes de vn entero y no todas car si todas las partes tuuiesse no seria quebra/do antes seria entero. asi mesmo numero q̄brado es numero re numero quebrado en figura ha d fazer vna raya desta manera —— encima dela qual raya se deue poner el numero quebrado y debaxo dela Rayca se deue poner el denominador ques aquel numero cuyas son las partes ques numero en/tero del q̄l el numero quebrado nascio y vino segun parecera tro partes. y si encima dela raya se poné .3. desta manera $\frac{3}{4}$ significan las tres partes de quatro partes de qualquiere co/sa. y asi diremos dela quarta figura que significa el quinto/o

La fracción como parte-todo

La fracción: Múltiples significados

<u>**Marco Aurel, 1552**</u>

“Quebrados simples son parte o partes de número entero [...] ***2 quintos de ducado quiere decir dos ducados enteros partidos en 5 partes iguales y vendrá a cada una de las 5 partes dos quintos de un ducado***: el numerador demuestra cuantos son los enteros que se han de partir y el denominador en cuántas partes iguales se han de partir”.


Los numeros q̃brados ſon de 2 maneras: los vnos ſe llaman quebrados ſimples, que ſon parte, o partes de nº entero: los otros ſe llaman quebrado de quebrado, ques parte, o partes de partes, o partes de quebrado ſimple. El quebrado ſimple ſe eſcriue con 2 numeros, el vno encima del otro, con vna raya traueſada por medio delos 2: el que eſta encima dela raya ſe llama nominador, y el debaxo denominador, como $\frac{2}{5}$ ducados quãto es, o q̃ quiere dezir? diras q̃ ſon 2 quintos de ducado: y quiere dezir, dos ducados enteros partidos en 5 partes yguales, y verna ha cada vna delas 5 partes dos quintos de vn ducado: el nominador demueſtra quantos ſon los enteros que ſe han de partir, y el denominador en quantas partes yguales ſe han de partir.

La fracción como reparto

La fracción como medida de una cantidad de magnitud

Ideas a partir de Escolano (2007), Domenech y Martínez-Juste (2019), etc.

La fracción aparece como resultado de expresar numéricamente una cantidad de magnitud (idealmente la longitud) utilizando unidades arbitrarias diseñadas *ad hoc* por el enseñante.

La fracción ***a/b*** indica que se ha necesitado subdividir la unidad en ***b*** partes iguales y tomar ***a*** de ellas en un proceso de medida directa por recubrimiento.

a/b representa una cantidad de magnitud equivalente a la de ***a*** trozos cuya cantidad de magnitud es ***1/b***.

La fracción como medida de una cantidad de magnitud

Ideas a partir de Escolano y Gairín (2005), Escolano (2007), Domenech y Martínez-Juste (2019), etc.

¿Por qué priorizar este significado frente a los otros?

- Enfatiza en carácter numérico (que indica una cantidad) del objeto; pero lo separa claramente del número natural.
- Permite asumir naturalmente las fracciones impropias.
- Permite construir y dotar de sentido ideas y procesos abstractos.

La fracción como medida de una cantidad de magnitud

Ideas a partir de Escolano (2007), Domenech y Martínez-Juste (2019), etc.

La fracción como medida de una cantidad de magnitud dota de significado de forma sencilla al concepto de equivalencia de fracciones y proporciona herramientas para construir algoritmos asociados.

También permite abordar de forma coherente y con control semántico todas las operaciones aritméticas y sus algoritmos.

La fracción como medida de una cantidad de magnitud

Ideas a partir de Escolano (2007), Domenech y Martínez-Juste (2019), etc.

Para las situaciones aditivas:

Se puede recurrir a los significados de la suma y de la resta en el contexto de los números naturales, ya que las fracciones siguen representando cantidades.

La necesidad de tener “denominadores comunes” surge de forma natural. No así la de tener el mínimo común denominador; pero ¿es que es necesario?

La fracción como medida de una cantidad de magnitud

Ideas a partir de Escolano (2007), Domenech y Martínez-Juste (2019), etc.

Para el producto:

- Producto de fracción por número natural.

  No hay conmutatividad semántica.

  ¡¡No es lo mismo 5 veces 3/4 que 3/4 de 5!!

  Suma reiterada frente a sentido de operador.

  Actividades de tipo *up and down*.

La fracción como medida de una cantidad de magnitud

Ideas a partir de Escolano (2007), Domenech y Martínez-Juste (2019), etc.

Para el producto:

- Producto de fracciones donde una es un operador.

  Actividades tipo *up and down* donde se hace necesario poner en juego “distintas unidades”.

- Producto de fracciones donde ambas son medidas.

  Trabajo con el modelo de medida para la magnitud área. Confrontación de medida directa y medida indirecta.

La fracción como medida de una cantidad de magnitud

Ideas a partir de Escolano (2007), Domenech y Martínez-Juste (2019), etc.

Para el cociente:

- Fracción entre número natural: enfoque partitivo.
- Fracción entre fracción: enfoque cuotitivo.

¿Cuántos vasos de 2/5 de litro se pueden llenar con una botella de 3/2 de litro?

Cambio en el algoritmo al que se llega (o pretende llegar).

Otros significados a partir de la medida

La fracción como resultado de un reparto: ***a/b*** es la medida de la cantidad de magnitud que toca a cada una de ***b*** personas si se les reparte equitativamente ***a*** unidades.

La fracción como razón: medir indirectamente una cantidad de magnitud utilizando como unidad de medida una cantidad de otra magnitud diferente. La fracción ***a/b*** es la cantidad de la primera magnitud que se corresponde con una unidad de la segunda.

TERCERA PARTE

CÁLCULO DE ÁREAS EN SECUNDARIA. TÉCNICAS Y TECNOLOGÍAS.

Calculo de áreas en el currículo aragonés de ESO

Primer curso:

- Áreas en figuras planas: deducción, interpretación y aplicación de fórmulas.

Segundo curso:

- Áreas en figuras planas y tridimensionales: deducción, interpretación y aplicación de fórmulas.

Tercer curso:

- Áreas en figuras planas y tridimensionales: aplicación de fórmulas.

Calculo de áreas en el currículo aragonés de ESO

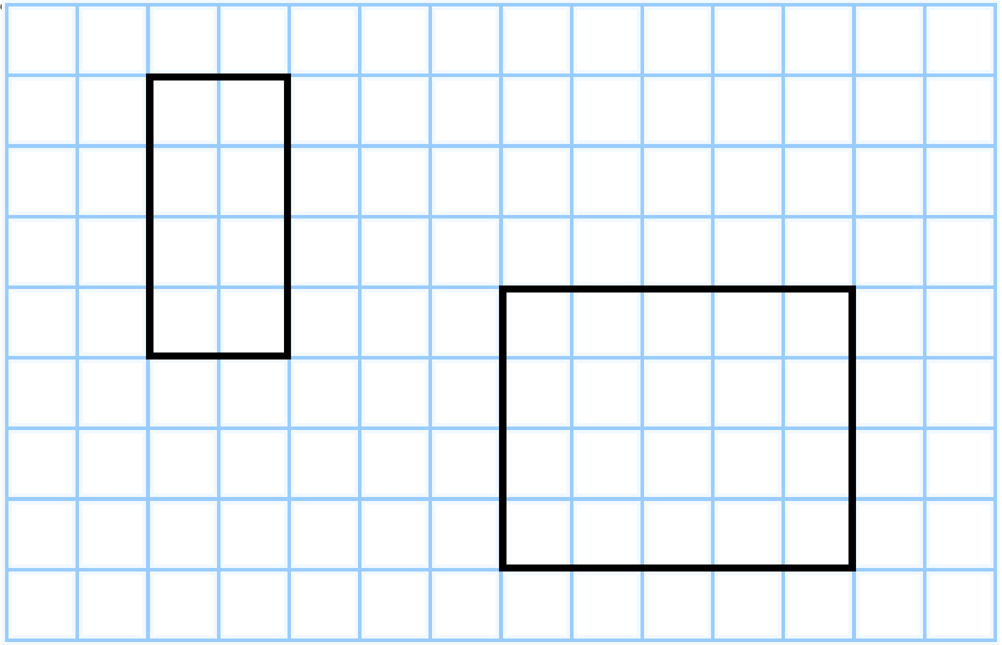
En el currículo de Educación Primaria no se plantea el cálculo de áreas de forma indirecta mediante fórmulas.

Idealmente, el enfoque en Educación Secundaria Obligatoria hace de nexo de unión.

En Bachillerato se calculan áreas de forma indirecta haciendo uso de sistemas de coordenadas (en el contexto de la geometría analítica) y de la regla de Barrow (en el contexto del trabajo con funciones.

Calculo de áreas en ESO

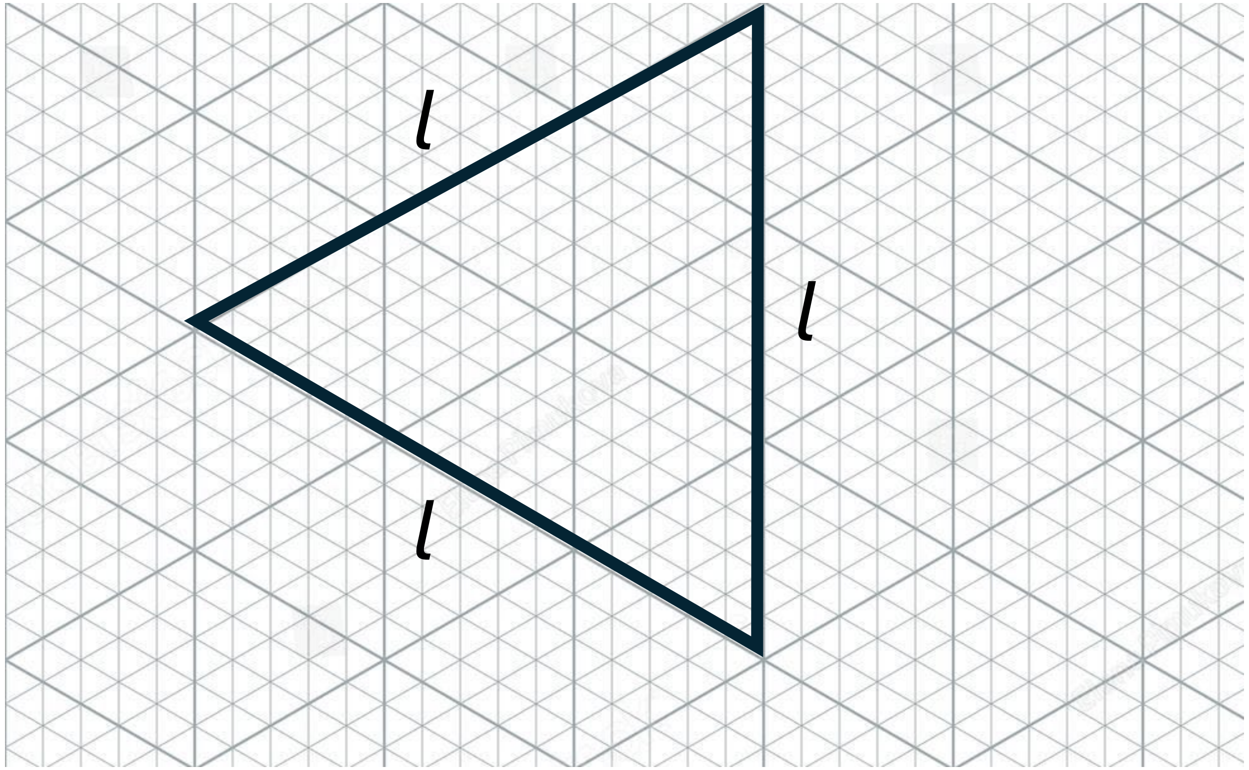
En Educación Primaria se debería haber trabajado la medida directa del área por embaldosado. Esto permite “deducir” una fórmula para la medida indirecta del área de un rectángulo.



Calculo de áreas en ESO

Pregunta:

¿Es cierta la siguiente fórmula?



$A = l^2$

Calculo de áreas en ESO

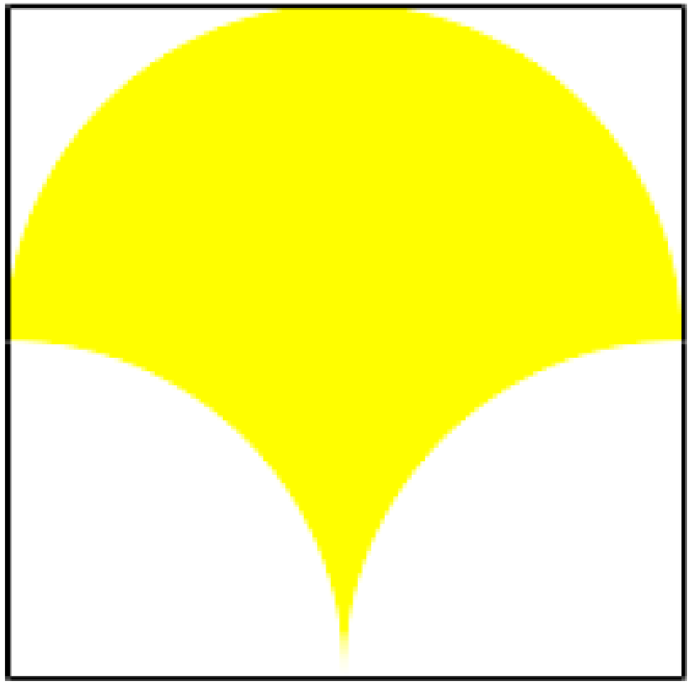
Cuidado:

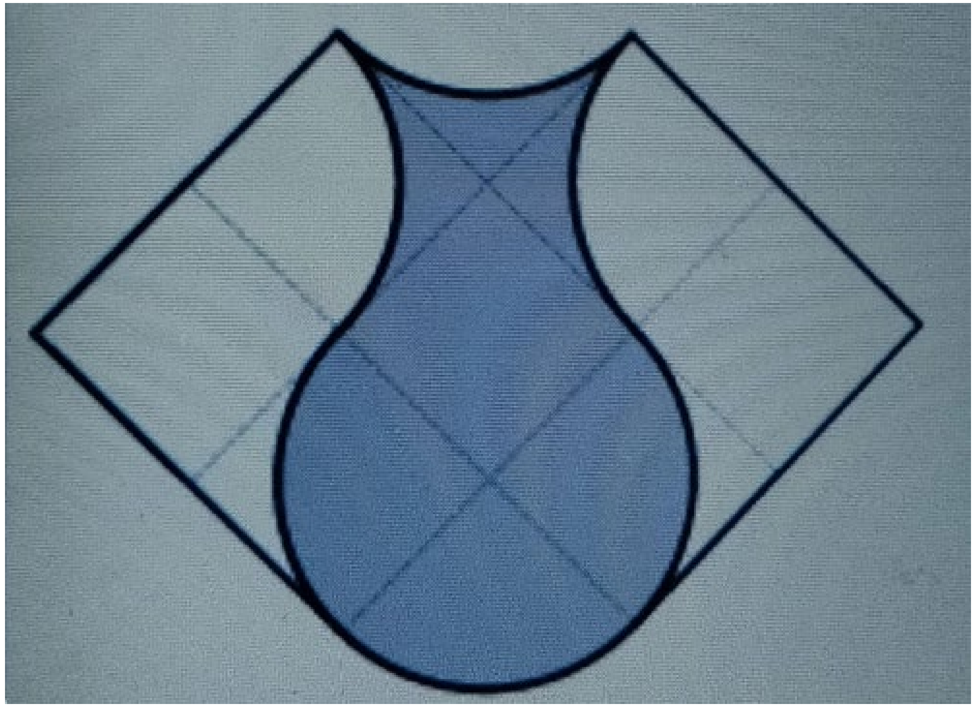
- Hay dos magnitudes implicadas: área y longitud. Estamos midiendo cantidades de longitud de ambas.
- ¿Cuál es la unidad para cada una de ellas?
- ¿Son “compatibles” ambas unidades?

Todo esto requiere haber trabajado de forma profunda y significativa los procesos de medida directa y todas sus ideas asociadas.

Calculo de áreas en ESO

En Educación Primaria se debería haber trabajado comparación de cantidades de área a través de la composición y descomposición (conservación y transitividad).





Calculo de áreas en el currículo aragonés de ESO

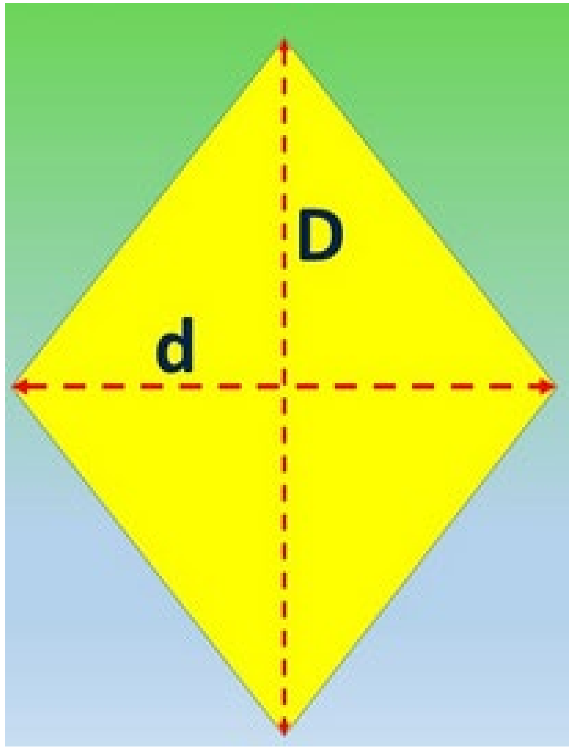
A partir del caso del rectángulo y mediante composición y descomposición se pueden deducir fórmulas para la medida indirecta del área de:

- Paralelogramos y trapecios
- Triángulos.
- Rombos y cometas.
- Polígonos regulares.

¿Cómo?

Calculo de áreas en el currículo aragonés de ESO

Un comentario sobre cuestiones semánticas y manipulaciones formales.

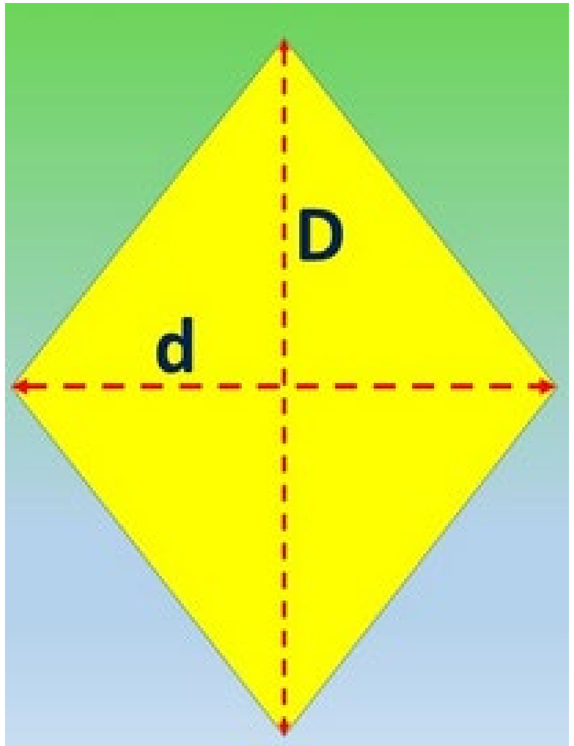


$$A = \frac{D \cdot d}{2} = D \cdot \frac{d}{2} = \frac{D}{2} \cdot d = \left(\frac{d \cdot {}^{D}\!/_{2}}{2} \right) \cdot 2 = \left(\frac{\frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2}}{2} \right) \cdot 4$$

¿De dónde salen estas expresiones?

Calculo de áreas en el currículo aragonés de ESO

Un comentario sobre cuestiones semánticas y manipulaciones formales.



$$A = \frac{D \cdot d}{2} = D \cdot \frac{d}{2} = \frac{D}{2} \cdot d = \left(\frac{d \cdot {}^{D}\!/_{2}}{2} \right) \cdot 2 = \left(\frac{\frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2}}{2} \right) \cdot 4$$

¿De dónde salen estas expresiones?

¿En qué sentido son iguales, si es que lo son, las expresiones anteriores para un estudiante?

Calculo de áreas en el currículo aragonés de ESO

¿Y los polígonos irregulares?

¿Y el área del círculo?

Abordar el área del círculo a partir de este enfoque permite introducir elementos relacionados con la precisión y las aproximaciones e incluso servir como un primer acercamiento intuitivo al concepto de límite.

CUARTA PARTE

EL SENTIDO DE LA MEDIDA EN BACHILLERATO. EL LÍMITE Y MÁS ALLÁ

El sentido de medida en el bachillerato

Matemáticas I:

- Cálculo de longitudes y medidas angulares: uso de la trigonometría.
- Límites: estimación y cálculo a partir de una tabla, un gráfico o una expresión algebraica.
- Continuidad de funciones: aplicación de límites en el estudio de la continuidad.
- Derivada de una función: definición a partir del estudio del cambio en diferentes contextos.

Matemáticas II:

- Resolución de problemas que impliquen medidas de longitud, superficie o volumen en un sistema de coordenadas cartesianas.
- Interpretación de la integral definida como el área bajo una curva.
- Cálculo de áreas bajo una curva: técnicas elementales para el cálculo de primitivas.
- Técnicas para la aplicación del concepto de integral a la resolución de problemas que impliquen cálculo de superficies planas o volúmenes de revolución.
- Derivadas: interpretación y aplicación al cálculo de límites.
- Aplicación de los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad a la representación y al estudio de situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante funciones.
- La derivada como razón de cambio en la resolución de problemas de optimización en contextos diversos.

El sentido de medida en el bachillerato

Matemáticas aplicadas a las CCSS I:

- Límites: estimación y cálculo a partir de una tabla, un gráfico o una expresión algebraica.
- Continuidad de funciones: aplicación de límites en el estudio de la continuidad.
- Derivada de una función: definición a partir del estudio del cambio en contextos de las Ciencias Sociales.

Matemáticas aplicadas a las CCSS II:

- Interpretación de la integral definida como el área bajo una curva.
- Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicación al cálculo de áreas.
- La derivada como razón de cambio en resolución de problemas de optimización en contextos diversos.
- Aplicación de los conceptos de límite y derivada a la representación y al estudio de situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante funciones.

El límite.

La noción de límite es un concepto matemático que forma parte del pensamiento matemático avanzado (Tall, 1991) y que ha tomado gran relevancia por su complejidad y por las dificultades de aprendizaje que genera entre los estudiantes.

Sucesiones – Funciones.
En un punto – En el infinito.
Finito – Infinito.

El límite: Obstáculos epistemológicos.

Cornu (1983) identifica los siguientes:

- Sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.
- Sobregeneralización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.
- Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.
- Los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

El límite: Definición

LIMITE, ſ. f. (*Mathémat.*) On dit qu'une grandeur eſt la *limite* d'une autre grandeur, quand la ſeconde peut approcher de la premiere plus près que d'une grandeur donnée, ſi petite qu'on la puiſſe ſuppoſer, ſans pourtant que la grandeur qui approche, puiſſe jamais ſurpaſſer la grandeur dont elle approche; enſorte que la différence d'une pareille quantité à ſa *limite* eſt abſolument inaſſignable.

Enciclopedia (1765)

fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres.

Cauchy (1821)

y a destra o a sinistra di a, o anche, più semplicemente, che A è il limite di y per $x=a$ a destra o a sinistra o per $x=a+0$ e $x=a-0$ respettivamente (*), quando preso a piacere un numero differente da zero ma arbitrariamente piccolo e positivo σ, si potrà trovare un numero ε, positivo nel primo caso e negativo nel secondo, tale che per *tutti* i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon$ (a escluso) la differenza $A-y$ sia sempre numericamente inferiore a σ.

Dini (1878)

El límite de una función f, cuando x tiende a c es L si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo número real x en el dominio de la función, si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Wikipedia (ayer)

El límite: Imágenes conceptuales

Noción de imagen conceptual (Przenioslo, 2004, p. 104):

"La estructura cognitiva que contiene todos los tipos de asociaciones y concepciones relacionadas con un concepto [...] incluyendo intuiciones, elementos de comprensión formal, pautas establecidas, procedimientos aplicados a distintas situaciones y estrategias operacionales".

El límite: Imágenes conceptuales

Para el caso del límite esta autora identifica imágenes conceptuales focalizadas en las ideas de:

- **‘Entorno’.**
- **‘Valores que se aproximan’.**
- ‘Gráfica que se aproxima’.
- ‘Estar definida en el punto’.
- ‘El límite en el punto coincide con la función en el punto’.
- ‘Una aproximación algorítmica esquemática’.

El límite: Importancia del lenguaje en la definición

Blázquez et al. (2009):

- El uso de “tiende” favorece el obstáculo epistemológico de la inaccesibilidad.
- El uso del plural personalizado (fijamos, encontramos, tanto como queramos, escribimos, diremos), supone un razonamiento asociado a la voluntad del usuario y resta universalidad.
- El uso de la forma impersonal “se dice”, tiene una connotación de rumor y se resta credibilidad.

El límite: Sistemas de representación

(Gómez Melo y Pantoja Portillo, 2013)

2. Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

Solución:

Primero eliminamos la indeterminación:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

Luego: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \dfrac{1}{4}$

Algebraico

1. Calcular el límite de $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ para $x \to 3$.

Solución:

La tabla muestra los valores *f(x)* en varios *x* cercanos al 3.

x	4	3,5	3,1	3,01	3,001	3	2,999	2,99	2,9
$\frac{x^2-9}{x-3}$	7	6,5	6,1	6,01	6,001	?	5,999	5,99	5,9

Luego: concluimos que el límite es 6.

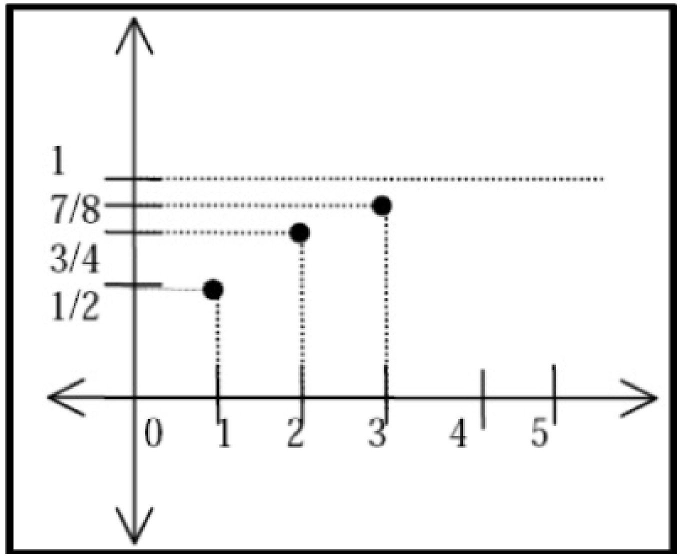
Numérico

Solución

Observando la figura 3.16 podemos concluir que si nos acercamos a 0 a través de valores positivos de x, encontramos que $f(x)$ se aproxima a 0. Si nos acercamos a 0 a través de valores negativos, vemos que $f(x)$ toma siempre el valor 1.

Hay dos valores posibles para el $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, que son 0 y 1. Como el límite si existe, es único, podemos afirmar que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe. ■

Verbal



Gráfico

El límite: GeoGebra como recurso

Entrad en www.geogebra.org y buscad dos applets que aborden el límite de una función. Uno que utilizaríais en el aula y otro que no.

Pensad las razones por las que usaríais uno y el otro no.

Pensad en qué momento del proceso de instrucción lo utilizaríais y por qué.

El límite: Acciones vinculadas a sistemas de representación (Socas, 2007; Duval, 2006)

- *Reconocimiento* de un objeto o de alguno de sus elementos en un sistema de representación concreto.
- *Transformaciones internas* (tratamientos) en un sistema de representación.
- *Transformaciones externas* (conversiones) entre distintos sistemas de representación.
- *Coordinación* entre distintos sistemas de representación.

El límite: Interactividad de un applet

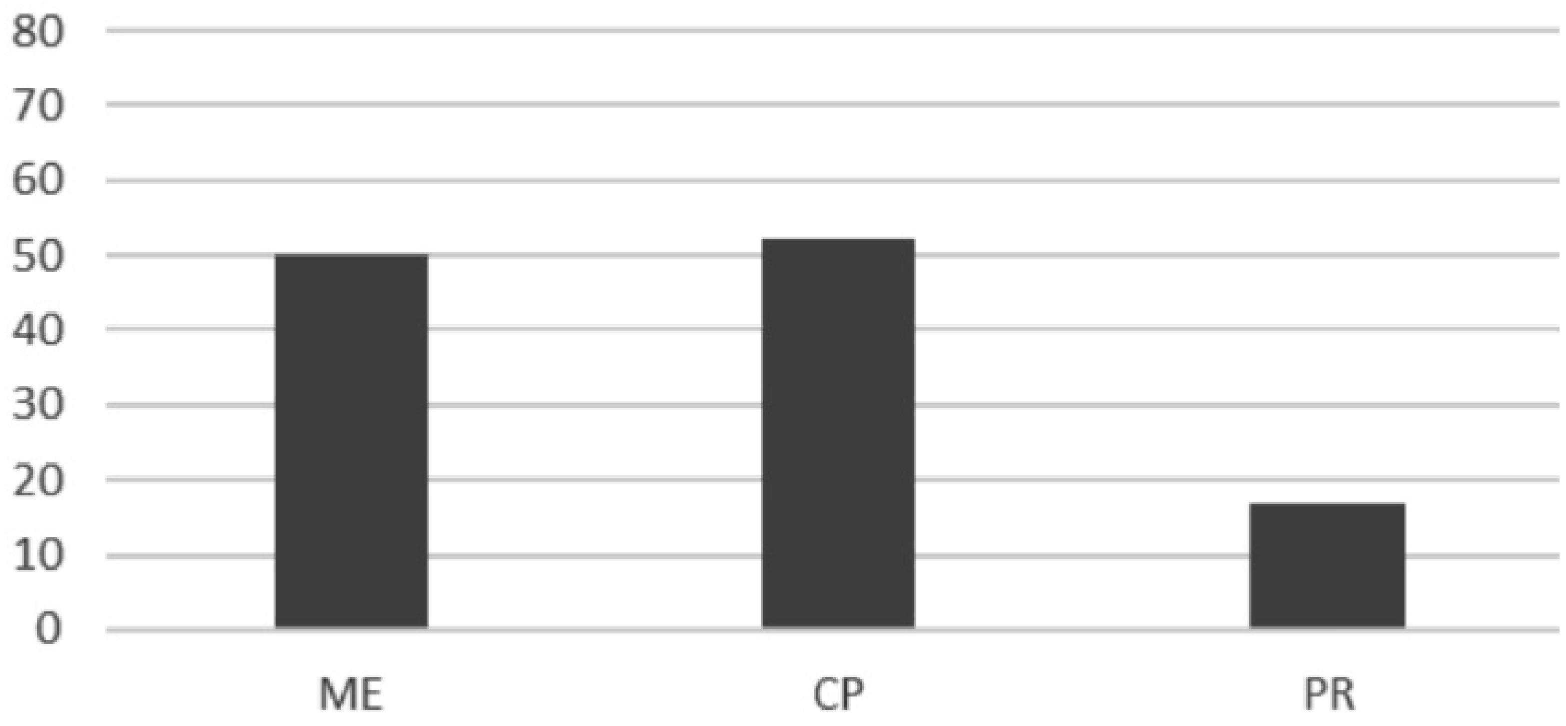
Interactividad, según Roussou et al. (2006):

“Capacidad de moverse libremente por un entorno virtual, experimentarlo de primera y desde múltiples puntos de vista, ***modificar sus elementos***, ***controlar parámetros*** o de ***responder al feedback*** ofrecido por el sistema”

El límite: GeoGebra como recurso (Barreras-Peral et al., 2022)

¿Cómo usamos GeoGebra?

Resultados de analizar 101 applets

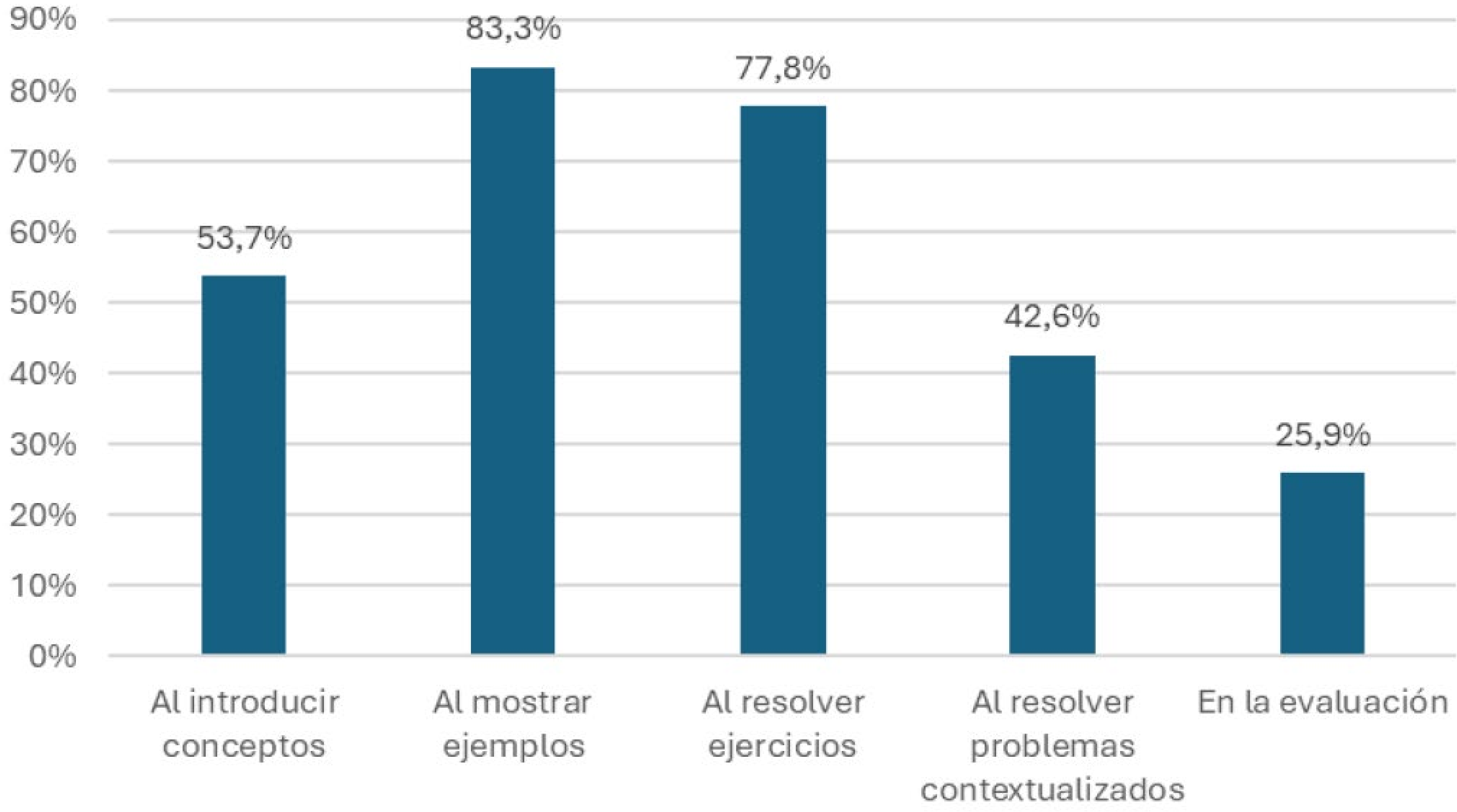


15 no interactivos

El límite: GeoGebra como recurso (Dubarbie Fernández et al., 2025)

¿Cuándo usamos GeoGebra?

Encuesta a 129 docentes en formación.



El límite: Más allá.

La noción de límite es un elemento central vinculado a los conceptos de derivada y de integral.

La derivada es el límite de una razón (¿o es la razón en el límite?). Una razón es una comparación entre dos magnitudes. La pendiente es cuánto subo ***por cada*** unidad de avance.

La integral es la cantidad de área por debajo de una curva. La integral de Riemann es "solamente" calcular una cantidad de área por recubrimientos rectangulares de forma cada vez más precisa.

El límite: Más allá.

Secuenciación “tradicional”:

Límite → Derivada → Primitivas → Integrales

¿Qué motivos hay detrás de esta secuenciación?

¿Nos convencen esos motivos desde un punto de vista didáctico-matemático?

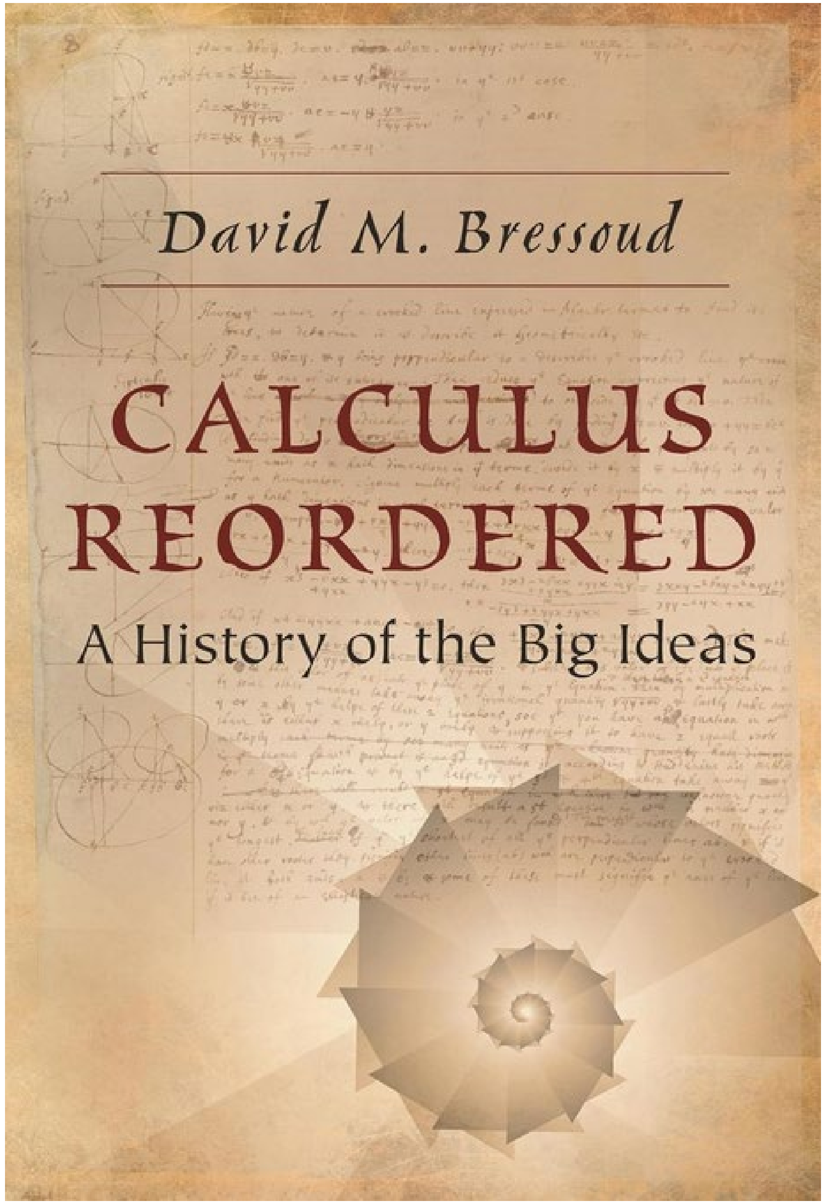
El límite: Más allá.

Otro mundo es posible (Bressoud, 2019):

“Las cuatro grandes ideas del cálculo en su orden histórico, y por lo tanto los títulos de nuestros capítulos, son:

1. Acumulación (integración)
2. Relaciones de cambio (derivación)
3. Secuencias de sumas parciales (series)
4. Álgebra de desigualdades (límites).

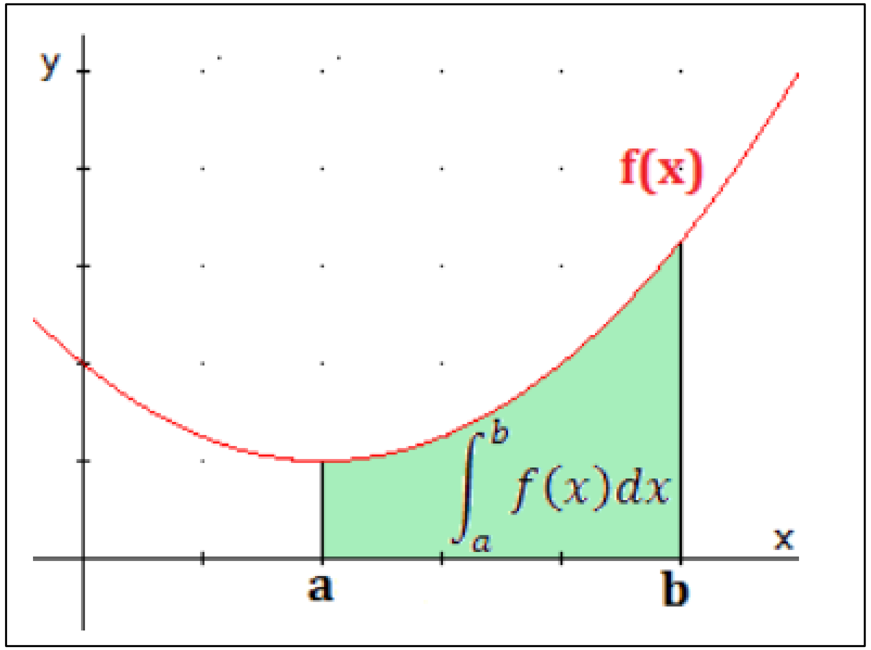
[...] Aunque puede que no sea necesario seguir estrictamente este orden histórico, cualquiera que enseñe cálculo debe ser consciente de los peligros que conlleva apartarse de él”.



EPÍLOGO

LARGO Y TORTUOSO ES EL CAMINO

Epílogo



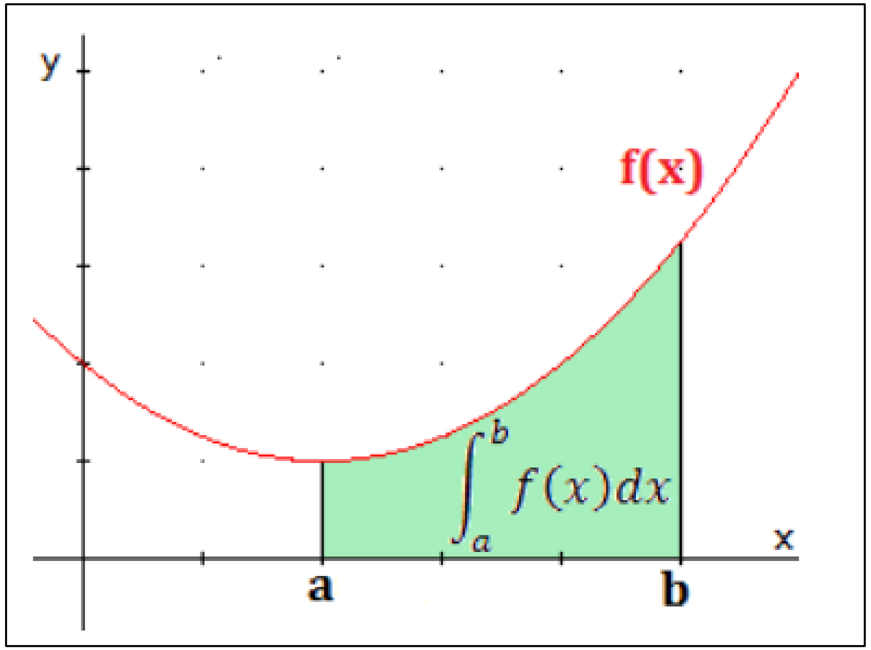
Epílogo

Epílogo

¿Realmente es tan duro y tortuoso el camino?

- En infantil y primaria se comienza a construir la noción de área, y su medida por recubrimiento.
- En primaria se avanza en lo anterior, trabajando la composición y descomposición de figuras (conservación). Se fija la técnica de medida directa del área.
- En secundaria se abordan las técnicas indirectas para la medida del área, sustentadas tecnológicamente en procesos de composición y descomposición. En el caso de figuras “curvadas” se plantea la idea de precisión y aproximación.
- En bachillerato, al introducir ideas que permiten manejar procesos infinitos, se puede introducir la idea de calcular esas áreas de forma infinitamente precisa.

Epílogo

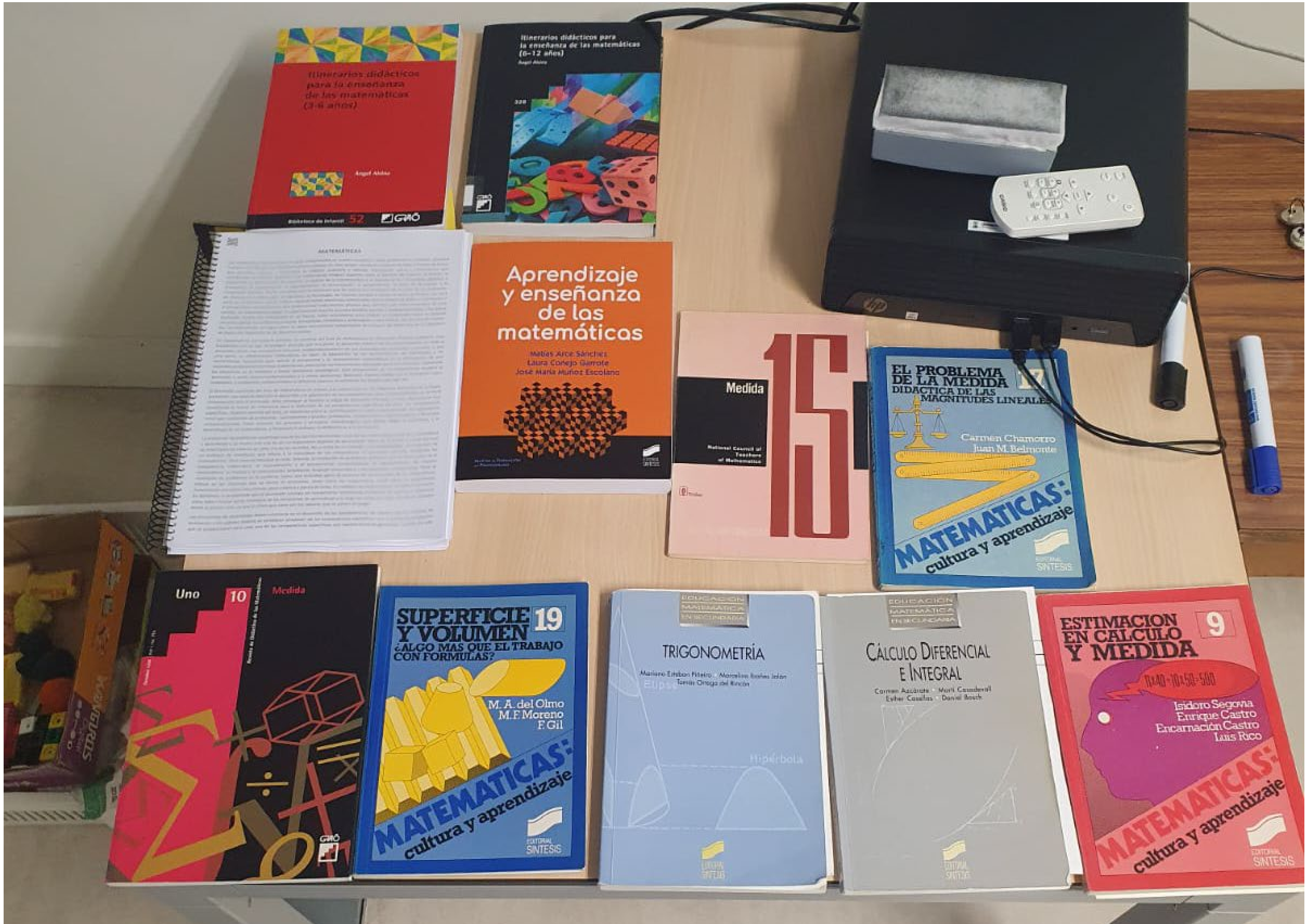


Epílogo

¿Realmente es tan duro y tortuoso el camino?

- El camino es largo. A veces es duro y a veces es tortuoso.
- Los estudiantes no lo recorren solos. Nos tienen a nosotros.
- Nosotros tenemos que conocer el camino. Los muchos caminos posibles. Necesitamos saber de dónde venimos y hacia dónde vamos.
- Para ello, los sentidos nos resultan útiles como docentes para trazar un mapa.
- Trabajar las competencias específicas permite que los estudiantes avancen por su camino.

Algunas lecturas



Referencias citadas en la presentación I

Aydoğdu, İ. y Çimen, E. (2021). Examination of the Estimation Skills of 6th Grade Students and the Process of Comparison of their Estimations with Real Measurement Values. *International e-Journal of Educational Studies*, *5*(10), 133-155.

Barreras Peral, Álvaro, Dubarbie, L. y Oller-Marcen , . A. M. . (2022). Análisis de applets de GeoGebra para la enseñanza del límite de una función. *Bordón. Revista De Pedagogía*, *74*(4), 65–83.

Bishop, A. (1991). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Kluwer.

Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualiza-ciones de límite funcional. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *12*(1), 145-168.

Bressoud, D. M. (2019). *Calculus reordered: a history of the big ideas*. Princeton University Press.

Cai, J., Ding, M. y Wang, T. (2014). How do exemplary Chinese and US mathematics teachers view instructional coherence? *Educational Studies in Mathematics*, *85*, 265-280.

Cornu B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Tesis doctoral. Grenoble.

Desli, D.,y Dimitropoulos, P. (2024). Investigating volume estimation performance and strategies of 6th-Grade children and adults. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *55*(6), 1366-1390.

Domenech, A. y Martínez-Juste, S. (2019). Actividades de razonamiento «up and down» para trabajar las fracciones en 1. º de ESO. *Entorno Abierto*, *29*, 13-18.

Dubarbie-Fernández, L., Barreras, A. y Oller-Marcén, A.M. (2025). El uso de GeoGebra en la enseñanza de conceptos matemáticos: prácticas, barreras y percepciones docentes. (2025). *Revista Latinoamericana De Tecnología Educativa - RELATEC*, *24*(1), 77-100.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103131.

Escolano, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: Un estudio desde los modelos de medida y cociente*. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza.

Referencias citadas en la presentación II

Escolano, R. y Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *1*(1), 17-35.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. D. Reidel.

Gómez Melo, L. M. y Pantoja Portillo, Y. M. (2013). Límite de funciones, sistemas de representación y estándares de calidad: una metodología de análisis de textos escolares. *Revista SIGMA*, *11*(1).

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Pizarro, N., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2014). Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 523-532). Salamanca: SEIEM.

Pizarro, N., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2015). La definición del concepto estimación de medida de los maestros de Primaria. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28* (pp. 1202-1209). Barranquilla: CLAME.

Pizarro, N., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2016). Caracterización de las tareas de estimación y medición de magnitudes. *Números*, *91*, 91-103.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, *55*, 103132.

Roanes Macias, E. (1976). *Didáctica de las matemáticas*. Ediciones Anaya.

Roussou, M., Oliver, M. y Slater, M. (2006). The virtual playground: an educational virtual reality environment for evaluating interactivity and conceptual learning. *Virtual Reality*, *10*(34), 227-240.

Schmidt, W. H., Wang, H. C. y McKnight, C. C. (2005). Curriculum coherence: An examination of US mathematics and science content standards from an international perspective. *Journal of curriculum studies*, *37*(5), 525-559.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Síntesis,

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (eds.), *Investigación en educación matemática XI* (pp. 1952). SEIEM.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Kluwer.