
SENTIDO ESTOCÁSTICO

Nuria Begué Pedrosa

CONTENIDOS

- ❖ La probabilidad en el currículo aragonés
- ❖ Elementos de didáctica del sentido estocástico para el trabajo de la probabilidad:
 - Caracterización de los significados probabilidad.
 - Heurísticas y sesgos asociados al razonamiento probabilístico
- ❖ Propuestas para el trabajo de la probabilidad. Diseño y evaluación.
- ❖ Materiales y recursos para el desarrollo del razonamiento probabilístico desde la toma de decisiones. El papel del juego.

Caracterización del término en el currículo LOMLOE

El sentido estocástico se orienta hacia el razonamiento y la interpretación de datos y la valoración crítica y la toma de decisiones a partir de información estadística, además de la *comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios en situaciones cercanas y significativas para el alumnado*.

El saber estocástico aparece subdividido en el currículo en dos bloques

- Distribución e inferencia
- **Predictibilidad e incertidumbre**

El sentido estocástico, tanto desde la estadística como desde la probabilidad, tiene como elemento importante y distinto de otros ámbitos de la matemática el **trabajar con la variabilidad de las situaciones frente al determinismo**, por lo que cobra especial importancia y es un sentido clave para crear ciudadanos informados con suficientes conocimientos y competencias para que ante fenómenos aleatorios y tratamiento e interpretación de datos e informaciones sean personas difícilmente manipulables y sean capaces de tomar decisiones y formarse opiniones de forma crítica y razonable.

...1ºESO...

En este sentido conviene mostrar la probabilidad como una rama de las matemáticas que da soporte al análisis de **experimentos o procesos de resultado incierto**.

Una rama de las matemáticas que trata de modelizar el funcionamiento de lo incierto

La combinación estratégica de **significados de la probabilidad** es otra de las cuestiones relevantes al comienzo de la Secundaria (Godino et. al, 1987).

El **significado frecuencial**, asociado a la realización de experimentos,[...]. Si bien en Educación Primaria el currículo hace hincapié en el fomento del **uso del lenguaje verbal** para expresar el grado de creencia en la ocurrencia de diversos sucesos, en esta etapa se debe profundizar en dichos usos pues constituyen la base del significado intuitivo de la probabilidad. Por ejemplo, expresar las opiniones respecto a la ocurrencia de hechos como la lluvia o que tu equipo gane el próximo partido. Es interesante poner estas expresiones en relación con la cantidad de información de que se dispone (mirar el cielo o la clasificación del equipo) ya que esto conectará con el **significado subjetivo** de la probabilidad que será desarrollado formalmente en los últimos cursos de ESO. El trabajo con la **regla de Laplace**, que se inicia en tercer ciclo de Educación Primaria, se debe continuar profundizando en la conexión con el significado frecuencial vía la experimentación. **Existe el riesgo de que la sencillez de la regla cree la falsa sensación de que todos los problemas se resuelven mediante su uso.** Se propone diseñar materiales que eviten ese obstáculo como **dados irregulares creados con pasta flexible** y su utilización en diversos juegos como la carrera de caballos.

...2ºESO

La experimentación que hacía surgir la interpretación frecuencial se complementa con la simulación por ordenador de determinados experimentos. En este curso se propone la elaboración de conjeturas que se deben comprobar vía la realización de experimentos sencillos o mediante el uso de programas informáticos o applets ya diseñadas para ello. [...]

La **realización de experimentos compuestos** por dos experimentos simples facilita la creación por parte del alumnado de **tablas de doble entrada o de diagramas de árbol** donde colocar los resultados que van apareciendo. [...]

Nos iniciamos en el desarrollo del
pensamiento aleatorio

¿Cómo cae la lluvia?



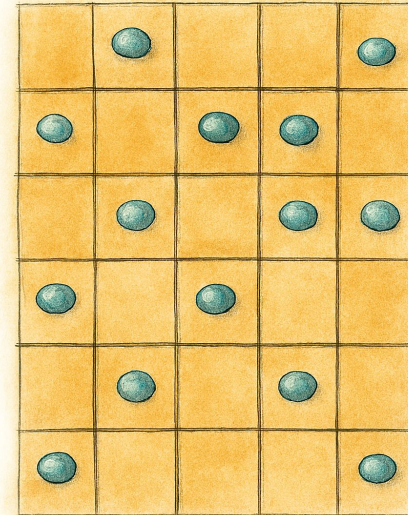
Experiencia tomada y adaptada de la investigación de Piaget e Inhelder (1951)

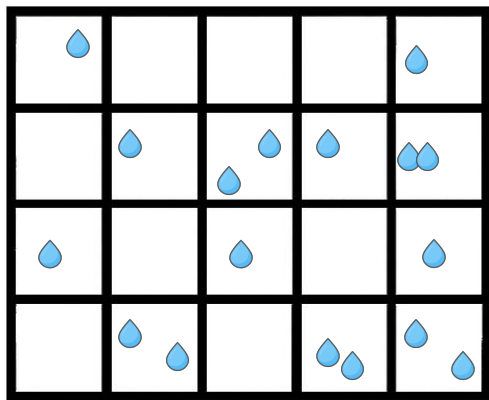
Una hoja de papel blanco se divide en cuadrados de 2 o 3 cm, y sobre ella se lanzan algunas fichas al azar, simulando gotas de lluvia.

¿Dónde crees que caerán las siguientes gotas de lluvia y cómo se irán repartiendo cuando caigan más gotas?

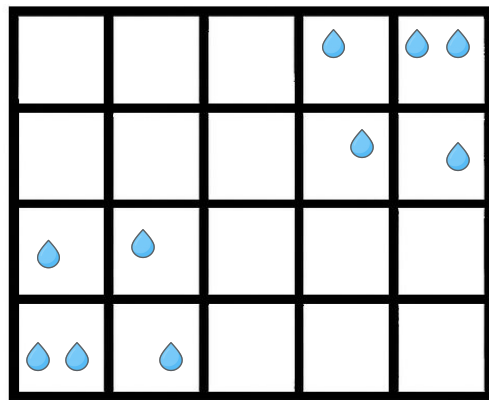
Se pide al niño que anticipe dónde caerán las gotas sucesivas y cómo se efectuará la distribución cuando aumente el número de gotas.

SIMULACIÓN

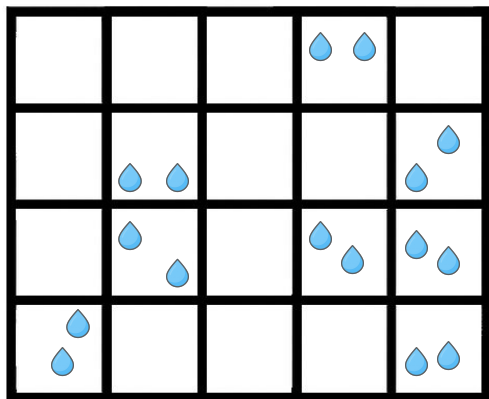




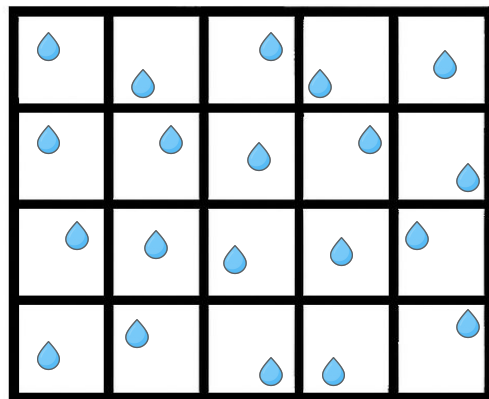
A



B



C



D

Experimento alternativo (Batanero et al. 1998; Batanero y Serrano, 1999)

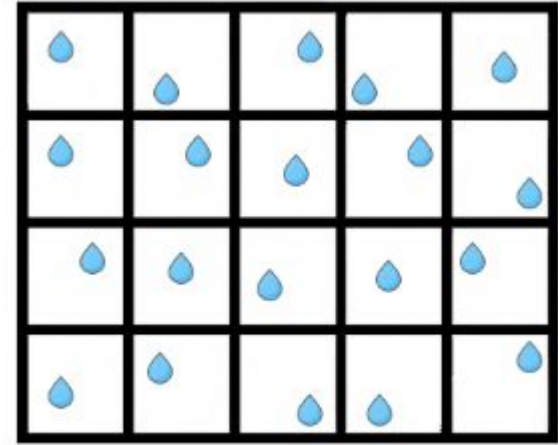
¿Cuál de estos cuatro dibujos crees que se parecerá más a cómo se acomodan las gotas de lluvia cuando empiezan a caer sobre las baldosas?

Niñas y niños de entre 7 a 11 años:

Aceptan que la distribución de las gotas sea irregular.

Sin embargo, si todos los cuadrados tienen al menos una gota, excepto uno, consideran que ese cuadrado “seco” es el más probable para recibir la siguiente gota.

Es poco común encontrar niños que coloquen siempre las gotas en el mismo lugar (por ejemplo, en el centro).



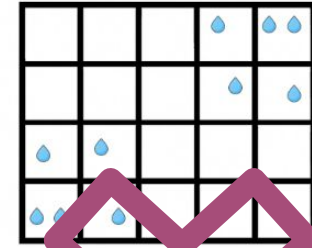
D

Experimento alternativo (Batanero et al. 1998; Batanero y Serrano, 1999)

A partir de 12 años.

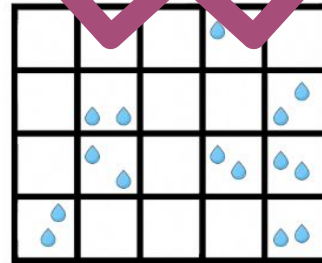
En función del número cada vez mayor de gotas, la diferencia en el número de gotas en las baldosas cada vez disminuye más, no en forma absoluta, sino en forma relativa

Elegirían como aleatorio el modelo A, que es el más razonable, pues en el B aparecen patrones geométricos no esperados y en el C todas las celdas tienen o bien dos puntos o están vacías.



B

Patrones
geométricos



C

Las casillas
tienen 0
gotas o 2
gotas

¿Cómo funciona el azar?



¡EXPLOREMOS!

Imagina que lanzas la moneda y pinta cada casilla según el color que imaginas que sale al lanzar la moneda.

SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (3), pp. 247-263.

Significados de la probabilidad en la educación secundaria^{*}

Carmen Batanero [†]

RESUMEN

En este trabajo partimos de un modelo teórico sobre el significado de los objetos matemáticos, en el que se consideran seis elementos diferenciados y se distingue entre el significado dado al objeto en una cierta institución de enseñanza y el personal, adquirido por un alumno dentro de la institución. Utilizamos estas ideas para analizar los distintos significados históricos de la probabilidad y cómo han sido tenidos en cuenta en la enseñanza secundaria. Dicho modelo también nos permite tener también una visión semiótica del razonamiento matemático e interpretar algunos errores frecuentes al resolver problemas de probabilidad en términos de conflictos semióticos. Finalizamos con algunas recomendaciones para mejorar la enseñanza de la probabilidad.

• **PALABRAS CLAVE:** Significado y comprensión, probabilidad, desarrollo histórico, conflictos semióticos

ABSTRACT

We summarise a model to analyse the meaning of any mathematical concept where we distinguish five interrelated components and also distinguish the meaning that for a given concept has been proposed or fixed in a specific teaching institution, and the meaning given to the concept by a particular student in the institution. These ideas are used to analyse the different historical meanings of probability and how they were taken into account in the teaching of probability at secondary school level. The model also provides a semiotic view of mathematical reasoning and serves to interpret some errors in solving probability problems in terms of semiotic conflicts. We conclude with some suggestions to improve the teaching of probability.

• **KEYWORDS:** Meaning and comprehension, probability, historic development, semiotic conflicts

Fecha de recepción: Noviembre de 2004 / Fecha de aceptación: Marzo de 2005

^{*}Este trabajo forma parte de los proyectos HA2002-0069, SEJ2004-00789, Madrid, MCYT y FQM-126, Junta de Andalucía.

[†]Universidad de Granada, España.

SIGNIFICADO DE LA PROBABILIDAD	CAMPOS DE PROBLEMAS	ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS	ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	DEFINICIONES Y PROPIEDADES	ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS
Intuitivo	• Sorteos • Adivinación	• Manipulación de generadores de azar: dados, cartas...	• Lenguaje ordinario	• Opinión impredecible, creencia	• Suerte • Destino
Clásica	• Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar	• Combinatoria • Proporciones • Análisis a priori de la estructura del experimento	• Triángulo aritmético • Listados de sucesos • Fórmulas combinatorias	• Cociente de casos favorables y posibles • Equiprobabilidad de sucesos simples	• Esperanza • Equitatividad • Independencia
Frecuencial	• Estimación de parámetros en poblaciones	• Registros de datos estadísticos a posteriori • Ajuste de curvas matemáticas • Análisis matemático • Simulación	• Tablas y gráficos estadísticos • Curvas de densidad • Tablas de números aleatorios • Tablas de distribuciones	• Límite de las frecuencias relativas • Carácter objetivo basado en la evidencia empírica	• Frecuencia relativa • Universo • Variable aleatoria • Distribución de probabilidad
Subjetiva	• Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles	• Teorema de Bayes • Asignación subjetiva de probabilidades	• Expresión de la probabilidad condicional	• Carácter subjetivo • Revisable con la experiencia	• Probabilidad condicional • Distribuciones a priori y a posteriori
Axiomática	• Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorio abstractos	• Teoría de conjuntos • Álgebra de conjuntos • Teoría de la medida	• Símbolos conjuntistas	• Función medible	• Espacio muestral • Espacio de probabilidad • Conjuntos de Borel

SIGNIFICADO INTUITIVO

Utilización de expresiones coloquiales o frases para cuantificar los sucesos inciertos

cierto

posible

bastante probable

hay alguna posibilidad

seguro

es imposible

casi imposible

se espera que

incierto

hay igual probabilidad

puede ser

sin duda

Elaborar un informe

Arturo y María son dos estudiantes de la facultad y un profesor, que quiere organizar una salida, les ha pedido que preparen una previsión del tiempo para el día 24 de mayo, último día de lectivo antes de comenzar el periodo de exámenes. A continuación se presenta una lista de expresiones que para utilizar en su informe:

Han empezado a ordenarlas según la confianza en que suceda. Este es el comienzo de su clasificación:

imposible
casi imposible
...
seguro

Termina de ordenar estas expresiones. Busca nuevas palabras o expresiones para referirse a hechos que pueden ocurrir y compáralas con las dadas.

Algunos sucesos que podrían ocurrir en tu localidad el 24 de mayo son:

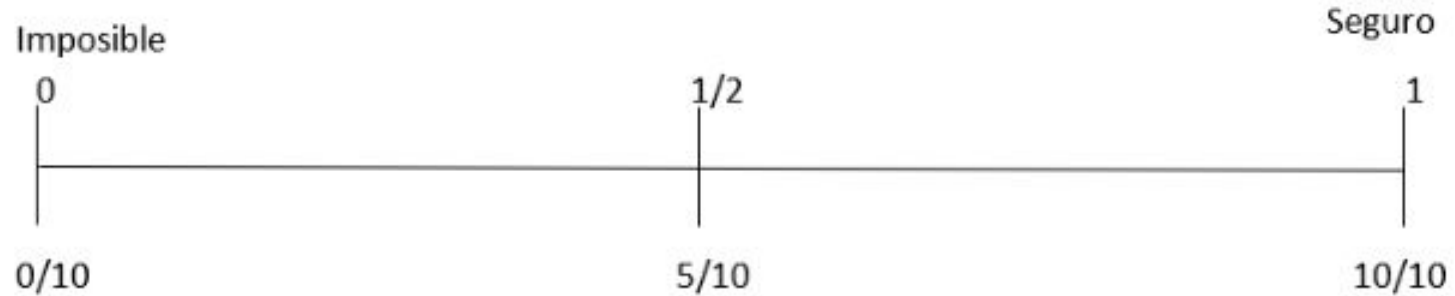
lloverá,
nevará y la nieve alcanzará un metro de altura,
el día será cálido y soleado,
habrá un ligero viento,
la temperatura máxima sobrepasará los 90 grados,
la temperatura mínima será de 10 grados bajo cero,
el cielo estará despejado,
la temperatura oscilará entre 25 y 35 grados.

Para realizar el informe, Arturo y María han comenzado de la siguiente manera:

Es poco probable que llueva. Es casi imposible que nieve.

¿Podrías ayudar a completar el informe? Utiliza en cada frase una palabra que exprese la confianza que tienes en que ocurra.

El segmento o escala de probabilidades

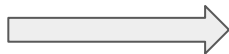


Tercer ciclo de primaria. *Orientaciones para la enseñanza*

La gran novedad es el uso de la **escala de probabilidad**. Es decir, lo que hasta ahora se valoraba desde el **lenguaje verbal natural**, pasa a ser susceptible de ser **cuantificado**.

Tercer ciclo de primaria. *Orientaciones para la enseñanza*

El paso a la cuantificación



Registros simbólicos para
expresar el grado de
incertidumbre asociado a un
suceso

La fracción

El número
decimal

El porcentaje

Si tuvieras que diseñar una tarea para abordar el cálculo de probabilidades en el aula, ¿cómo sería?

Una propuesta por parte de la IA



TAREA: "¿Qué probabilidad hay?"



Objetivo

Comprender y aplicar el concepto de probabilidad en situaciones cotidianas mediante el uso de juegos y experimentación.



Actividad: El juego de los dados y las cartas

Parte 1: Probabilidad con dados

1. En parejas, lanza un dado 50 veces.
2. Registra cuántas veces sale cada número (del 1 al 6).
3. Calcula la **frecuencia relativa** de cada número (número de veces que aparece dividido entre 50).
4. Compara los resultados con la **probabilidad teórica** (¿cuál debería ser la probabilidad de que salga un número concreto?).

Preguntas guía:

- ¿Qué número salió más veces? ¿Fue lo esperado?
- ¿La probabilidad teórica coincide con la práctica? ¿Por qué puede haber diferencias?

SIGNIFICADO CLÁSICO

1.  HE Probability of an Event is greater or less, according to the number of Chances by which it may happen, compared with the whole number of Chances by which it may either happen or fail.

2. Wherefore, if we constitute a Fraction whereof the Numerator be the number of Chances whereby an Event may happen, and the Denominator the number of all the Chances whereby it may either happen or fail, that Fraction will be a proper designation of the Probability

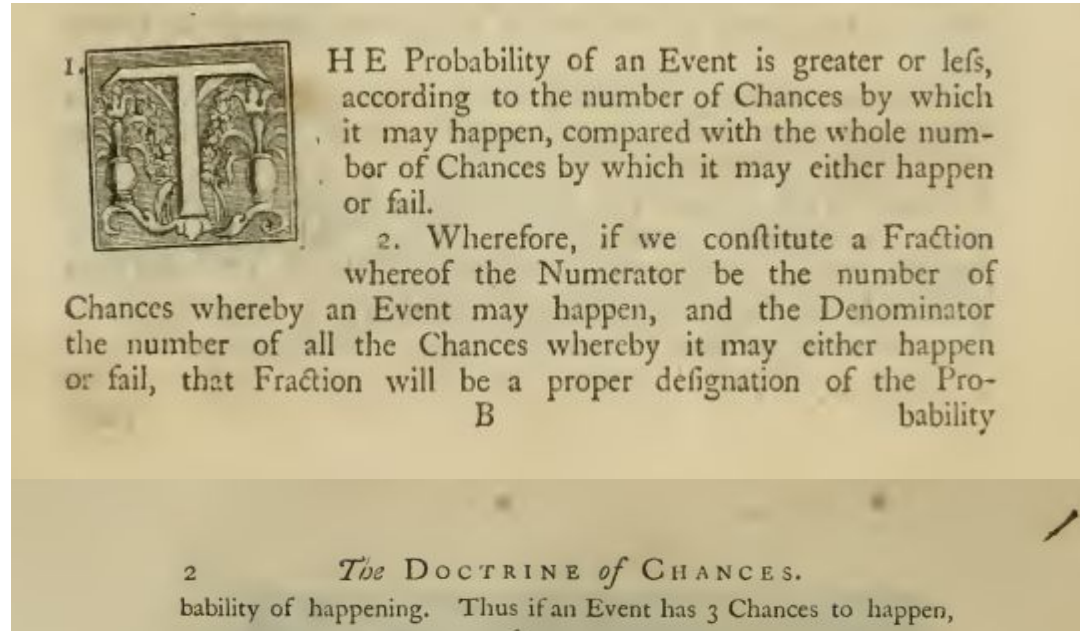
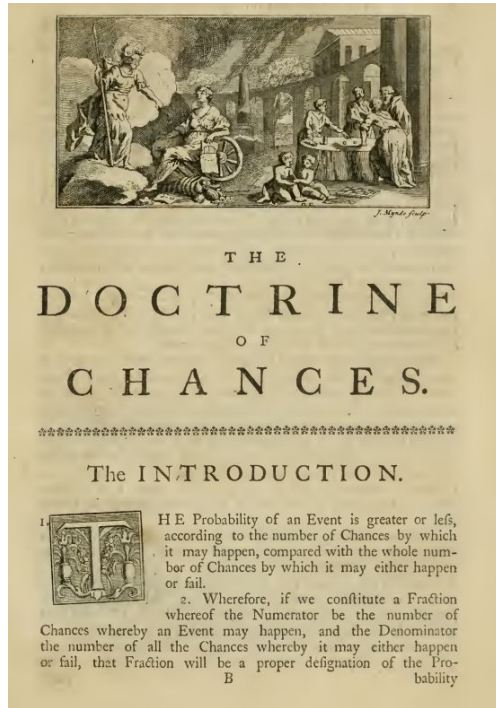
2

The DOCTRINE of CHANCES.

bability of happening. Thus if an Event has 3 Chances to happen,

“Por tanto, si constituimos una fracción cuyo denominador es el número de posibilidades con la que el suceso podría ocurrir y el denominador el número de posibilidades con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia” (De Moivre, 1967, p.1).

SIGNIFICADO CLÁSICO

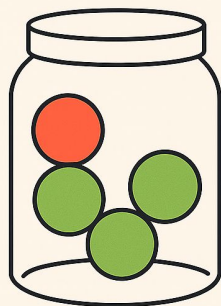


SIGNIFICADO CLÁSICO

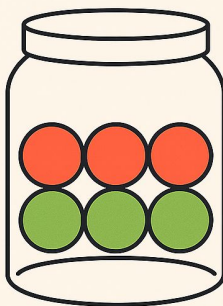
En 1814, Laplace acuñó la definición que hoy enseñamos como regla de para la probabilidad de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades, ***“como una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el número de todos los casos posibles”*** (Laplace, 1985/1914, p. 28)

Comparación de probabilidades.

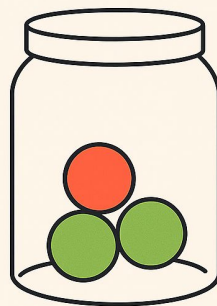
Este tipo de tareas se reducen a la aplicación de técnicas de comparación de fracciones al aplicar la regla de Laplace para establecer la probabilidad a priori de cada suceso.



Urna 1

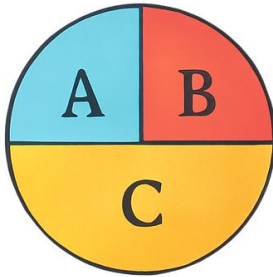


Urna 2

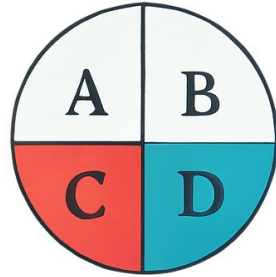


Urna 3

Ruleta 1



Ruleta 2



Tiro al blanco al azar

B	A	D
C		E
		F

La probabilidad asociada a cada suceso se define como una razón entre áreas.

Las tareas anteriores exigen el cálculo de la probabilidad asociada a un suceso.

SOLICITAR TAREAS DE CONSTRUCCIÓN

Actividad - Ruletas

- a) Construye una ruleta dibujando una circunferencia y utilizando un clip, como te indicará el docente, en la que se cumplan las siguientes condiciones. *Discutid en grupo cómo construirla.*
- El suceso *salir rojo* es más probable que el suceso *salir amarillo*.
 - El suceso *salir verde* es igual de probable que *salir amarillo*.
 - El suceso *salir azul* es casi imposible.

SIGNIFICADO CLÁSICO

¿Qué restricciones conduce la aplicación de la Regla de Laplace?

¿Es adecuada para modelar cualquier fenómeno aleatorio?

¿Qué efectos tiene un aprendizaje basado en el uso exclusivo del significado clásico de la probabilidad?

**El avión es el transporte
más seguro.**



SIGNIFICADO FRECUENCIAL

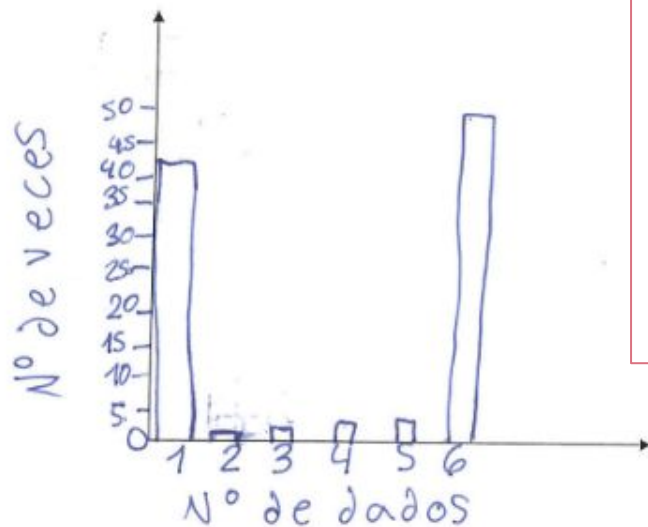
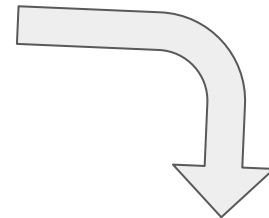
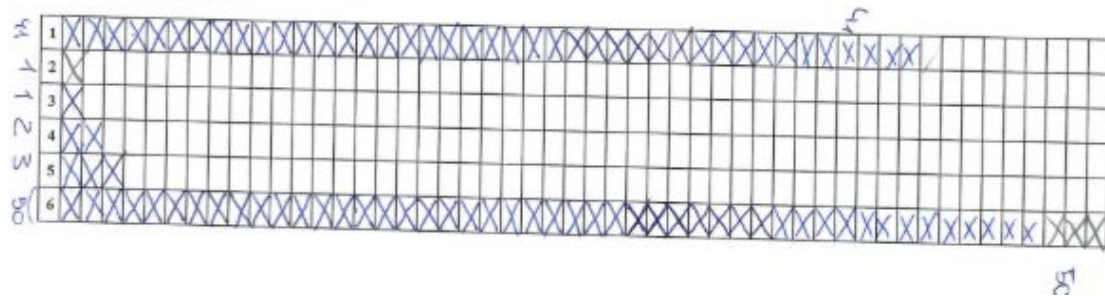
Bernoulli sugirió que podríamos asignar probabilidades a los sucesos aleatorios que aparecen en diversos campos, a partir de la frecuencia relativa observada en una serie grande de ensayos del experimento (1987/ 1713).

La probabilidad se define como el número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse (Von Mises, 1952/1928).

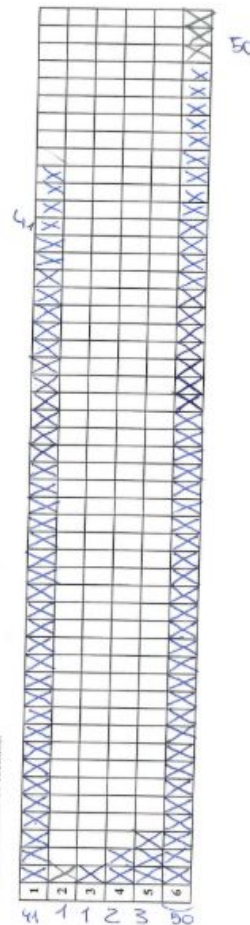
La pertinencia de considerar la frecuencia relativa como primer índice para medir las posibilidades de que un suceso dado se verifique.

Actividad. Carrera de caballos

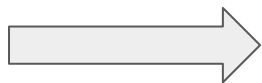
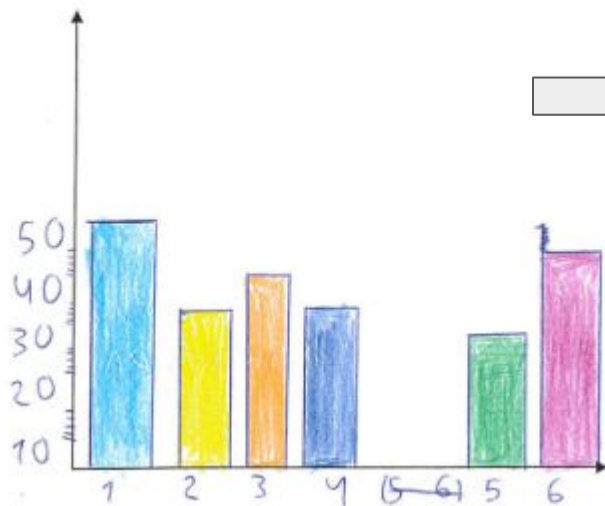
Tomad el dado que se os ha proporcionado. Con él vamos a jugar a un juego que llamaremos “Carrera de caballos” y consiste en lo siguiente. Utilizando como tablero el que se proporciona en el Anexo A, cada jugador elige un número del dado, que representará al caballo que elige. Por turnos, se lanza el dado, se observa el número que sale como resultado y avanza el caballo que tiene dicho número. Para indicar ese avance del caballo, se colorea una casilla, empezando por la más próxima a la salida.



CONSTRUCCIÓN
DEL DIAGRAMA
DE BARRAS
ASOCIADO A LA
FRECUENCIA
ABSOLUTA

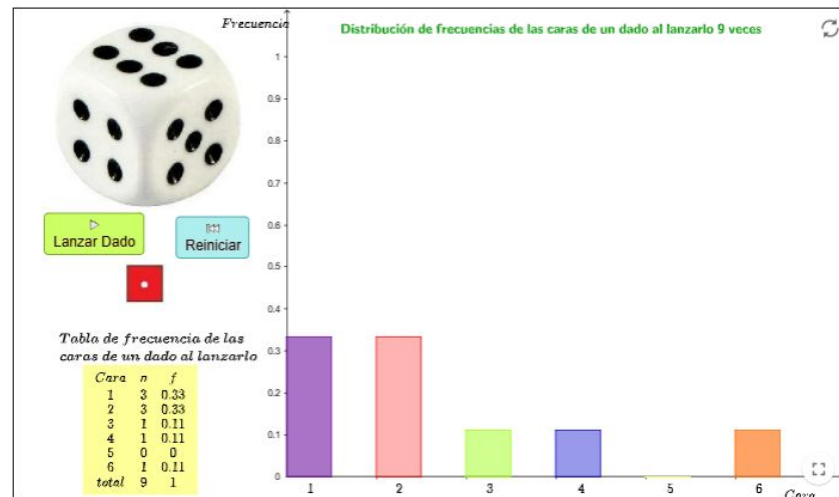
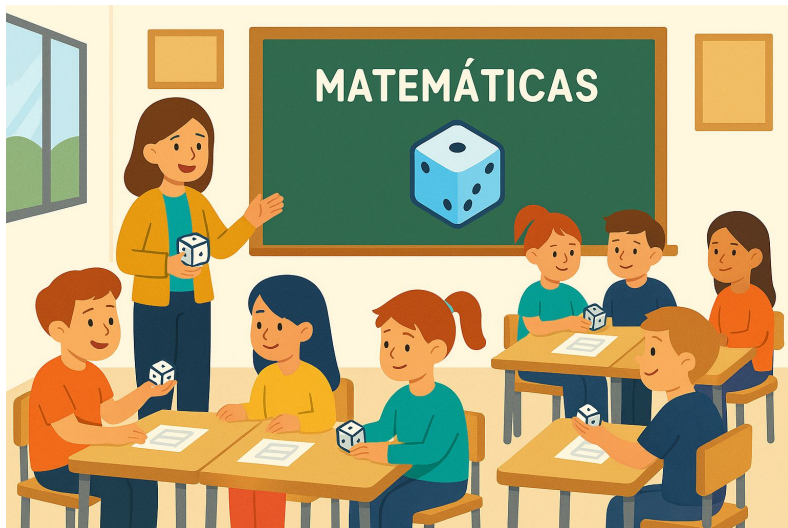


Frecuencia relativa



	Expresión verbal de la probabilidad	Probabilidad numérica
Probabilidad de sacar 1	De cada <u>236</u> veces que lance el dado espero que <u>50</u> salga 1.	$\frac{236}{50}$
Probabilidad de sacar 2	De cada <u>236</u> veces que lance el dado espero que <u>38</u> salga 2.	$\frac{236}{38}$
Probabilidad de sacar 3	De cada <u>236</u> veces que lance el dado espero que <u>44</u> salga 3.	$\frac{236}{44}$
Probabilidad de sacar 4	De cada <u>236</u> veces que lance el dado espero que <u>32</u> salga 4.	$\frac{236}{32}$
Probabilidad de sacar 5	De cada <u>236</u> veces que lance el dado espero que <u>26</u> salga 5.	$\frac{236}{26}$
Probabilidad de sacar 6	De cada <u>236</u> veces que lance el dado espero que <u>43</u> salga 6.	$\frac{236}{43}$

LA IMPORTANCIA DE LA EXPERIMENTACIÓN

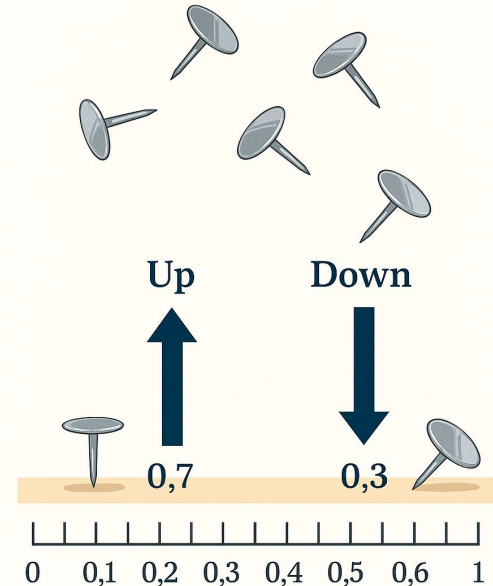


Actividad. Chinchetas

Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba y 32 caen hacia abajo .

Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño vacía una caja de 100 chinchetas y obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo.

Probability



	Tirada 1	Tirada 2	Tirada 3	Tirada 4	Tirada 5	Tirada 6	Tirada 7	Tirada 8	Tirada 9	Tirada 10	Número Total
Arriba	8	8	8	5	7	3	8	6	5	10	68
Abajo	2	2	2	5	3	7	2	4	5	0	32

- c) Tras la experimentación, ¿crees que es más probable que caiga con la punta hacia arriba o con la punta hacia abajo? Justifica tu respuesta apoyándote en los resultados obtenidos al realizar la experimentación.

Es más probable que caigan hacia abajo por que hacia arriba han caído 68 y hacia abajo 32.

- d) Según la experimentación cuyos datos se han recogido en la tabla, estima la probabilidad de que al lanzar una chincheta caiga con la punta hacia arriba. *Discutid en grupo y escribe tu reflexión aquí.*

Hay más o menos una probabilidad del 68% de que caigan hacia arriba.

	Tirada 1	Tirada 2	Tirada 3	Tirada 4	Tirada 5	Tirada 6	Tirada 7	Tirada 8	Tirada 9	Tirada 10	Número Total
Arriba	7	6	7	7	8	9	8	8	6	10	76
abajo	3	4	3	3	2	1	2	2	4	0	24

- c) Tras la experimentación, ¿crees que es más probable que caiga con la punta hacia arriba o con la punta hacia abajo? Justifica tu respuesta apoyándote en los resultados obtenidos al realizar la experimentación.

Lo más Probable es que caiga hacia arriba
Porque en total da más.

- d) Según la experimentación cuyos datos se han recogido en la tabla, estima la probabilidad de que al lanzar una chincheta caiga con la punta hacia arriba. *Discutid en grupo y escribe tu reflexión aquí.*

La Probabilidad que estimaría $\frac{76}{100}$

Variable didáctica: el número de veces que se repite el experimento aleatorio.

f) Rellena la siguiente tabla:

Nombre del equipo	Punta hacia arriba	Punta hacia abajo
Equipo 1		
Equipo 2		
Equipo 3		
Equipo 4		

g) Según los datos de la tabla anterior, estima la probabilidad de que al lanzar una chincheta caiga con la punta hacia arriba. Discutid en grupo y escribe tu reflexión aquí.

h) ¿Crees que la estimación del apartado g) es mejor que la del apartado d)? Justifica de manera individual tu respuesta.

- d) Según la experimentación cuyos datos se han recogido en la tabla, estima la probabilidad de que al lanzar una chincheta caiga con la punta hacia arriba. *Discutid en grupo y escribe tu reflexión aquí.*

Que caiga para arriba 76%

- g) Según los datos de la tabla anterior, estima la probabilidad de que al lanzar una chincheta caiga con la punta hacia arriba. *Discutid en grupo y escribe tu reflexión aquí.*

68% aprox.

- h) ¿Crees que la estimación del apartado g) es mejor que la del apartado d)? **Justifica de manera individual tu respuesta.**

creo que si porque hay más datos

e) Completa las siguientes frases:

- Por cada 100 veces que lanzo las chinchetas esperarí que 24 salga Hacia Abajo.
- Por cada vez que lanzo la chincheta esperarí que 76 salga con la punta hacia arriba.
- Si lanzara las chinchetas 500 veces esperarí que 380 con la punta hacia arriba.

Actividad

Para determinar quién repartirá el material, cada uno de vosotros lanzará diez veces una moneda. Ganará quien obtenga más caras en sus lanzamientos.



... segunda parte de la actividad

Para determinar quién repartirá el material, unos lanzarán diez veces una moneda, mientras que otros lanzarán 30 veces la moneda. Ganará quien obtenga más caras en sus lanzamientos.

¿Creéis que la situación planteada es justa?

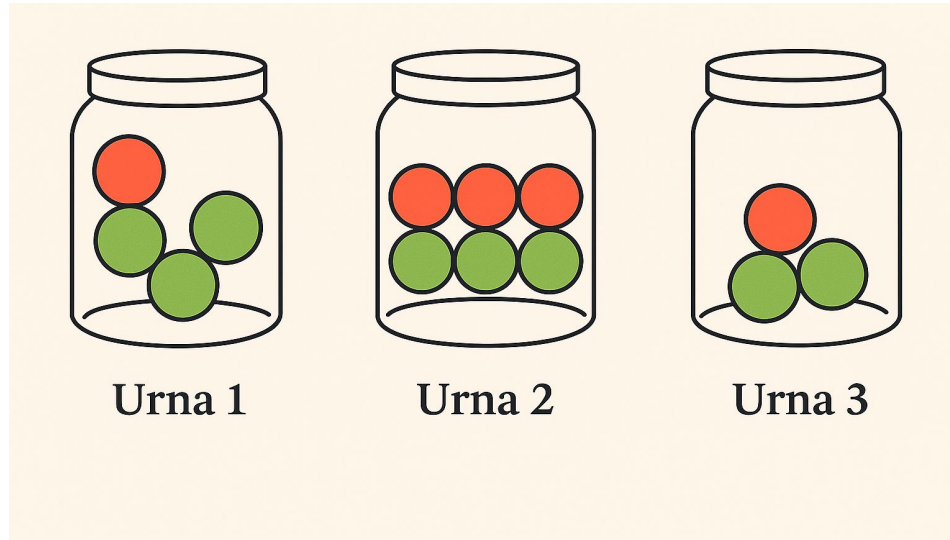
¿Quiénes tendrán más posibilidades de que les salga cara?

Las posibilidades no cambian al variar el número de veces que se realiza un experimento aleatorio.

La posibilidad viene expresada por la relación que exista entre el número de veces que ha aparecido un suceso determinado y el número de veces que se realiza el experimento.

La conexión del trabajo frecuencial y clásico

Llegar a la intuición de la Regla de Laplace a través del aumento del número de pruebas como forma de estimar la probabilidad.



SIGNIFICADO SUBJETIVO

Un nuevo punto de vista aparece a través de la regla de Bayes, que permite transformar las probabilidades a priori (antes de realizar un experimento) de varias causas, una vez observadas sus consecuencias, en probabilidades a posteriori, que incorporan la información de los datos analizados.



Daniel se levanta el lunes para ir a la facultad...



a) ¿Cogerá el paraguas Daniel?

Justifica tu respuesta, Reflexionad en grupo y anotad aquí vuestras conclusiones individuales.

Antes de salir para la facultad, recuerda las predicciones de lluvia que hicieron el viernes que vio las noticias.

Antes de salir para la facultad, recuerda las predicciones de lluvia que hicieron el viernes que vio las noticias.

¿Me la juégó sin paraguas?
¿O confió a la predicción del viernes?



Como no le apetece coger el paraguas, decide mientras desayuna mirar cómo está el cielo. Observa que está despejado, así que ante la confusión le pregunta a su madre, ¿crees que va a llover?

Mamá, ¿crees que va a llover?

No hay muchas nubes...
parece que no.

d1) En4erró el paraguas Tbiatr.

¡Está despejado! Que raro...



d2) Reflevóndan en situación.
¿tiene que coger el paraguas Daniel?

d2) En esta nueva situación, ¿tiene que coger el paraguas Daniel?

Heurísticas y sesgos en el razonamiento en situaciones de incertidumbre

Probablemente...



- ❑ El número 6 es el más difícil de sacar en un dado.
- ❑ Un juego es justo si lo juegas correctamente.
- ❑ Veré a alguien que conozco de camino a casa desde la escuela.
- ❑ Siempre llueve en las vacaciones de verano.
- ❑ Si compras muchos boletos de rifa, seguro ganarás un premio.
- ❑ Es más fácil obtener cara que cruz al lanzar una moneda.

La revisión de la literatura pone en relieve que la investigación identifica una serie de *razonamientos intuitivos en términos de heurísticas que producen la presencia de sesgos en el razonamiento*.

Ser consciente de los mismos nos va a permitir diseñar propuestas didácticas que ayuden a dar respuesta a las dificultades y, por tanto, ayudar en la adquisición de un adecuado razonamiento probabilístico.

HEURÍSTICA DE REPRESENTATIVIDAD

El sujeto estima la probabilidad de obtener un suceso comparando la similitud que guarda con la población de la cual se extrae o en el parecido de éste con el proceso por medio del cual se generan los resultados.

La probabilidad de que nazca un varón es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable?

- a) vHHVHV
- b) VVVHV

Insensibilidad al tamaño de la muestra

La persona asume que una muestra, aunque sea pequeña, siempre representa a la población, lo cual conduce a graves consecuencias en el trabajo estadístico.

Falacia del jugador

Supone considerar que el resultado de un experimento aleatorio afectará en la probabilidad de sucesos futuros. Por ejemplo, después de una racha de tamaño moderado de un mismo suceso, se espera que aumente la probabilidad de obtener el suceso contrario.

HEURÍSTICA DE LA DISPONIBILIDAD

Consiste en estimar la verosimilitud de un suceso basándose en la información previa de la persona sobre la ocurrencia del suceso de interés, es decir, los recuerdos. La aplicación de dicha heurística supone la estimación de la probabilidad, en función de la facilidad por encontrar ejemplos de situaciones similares (Díaz, 2003).

Sesgo de equiprobabilidad

Consiste en pensar que los resultados de cualquier fenómeno aleatorio son igualmente probables.

Serrano (1996) relaciona esta creencia con una de las concepciones históricas del concepto de aleatoriedad donde, al comienzo del estudio de la teoría de la probabilidad, se relacionaba aleatoriedad y equiprobabilidad.

Ejemplos de estudiantes

Maria	Pedro	Andrés	Manuel
Punta hacia arriba: 50	Punta hacia arriba: 50	Punta hacia arriba: 50	Punta hacia arriba: 50
Punta hacia abajo: 50	Punta hacia abajo: 50	Punta hacia abajo: 50	Punta hacia abajo: 50

Cuéntame en estas líneas cómo has rellenado la tabla:

Porque hay 2 opciones y no hay ningún dato.

Estudiante de 6º de primaria

Respuesta: “Pienso que cualquier resultado que se escriba será correcto. Pienso esto porque cada chincheta que se tira tiene **un 50% de probabilidades de caer con la punta hacia arriba y 50% de probabilidades de caer con la punta hacia abajo**. De esa manera el resultado de cómo caen las chinchetas, no tiene nada que ver con el resultado que daba el profesor”

Estudiante de 2º bachillerato

Ejemplos de estudiantes

Maria	Pedro	Andrés	Marcel
Punta hacia arriba: 50	Punta hacia arriba: 50	Punta hacia arriba: 50	Punta hacia arriba: 50
Punta hacia abajo: 50	Punta hacia abajo: 50	Punta hacia abajo: 50	Punta hacia abajo: 50

Cuénta en estas líneas cómo has relleno la tabla:

Porque hay 2 opciones y no hay ningún dato.

- b) Realiza la experiencia con el material proporcionado y recoge los resultados en la siguiente tabla.
Trabajo en grupo, cada uno anota en su hoja.

	Tirada 1	Tirada 2	Tirada 3	Tirada 4	Tirada 5	Tirada 6	Tirada 7	Tirada 8	Tirada 9	Tirada 10	Número Total
Arriba	8	7	7	7	7	6	6	7	6	5	66
Abajo	2	3	3	3	3	4	4	3	4	5	34

- c) Tras la experimentación, ¿crees que es más probable que caiga con la punta hacia arriba o con la punta hacia abajo? Justifica tu respuesta apoyándote en los resultados obtenidos al realizar la experimentación.

Hacia arriba porque es el que más veces da salida.

- d) Según la experimentación cuyos datos se han recogido en la tabla, estima la probabilidad de que al lanzar una chincheta caiga con la punta hacia arriba. Discutid en grupo y escribe tu reflexión aquí.

66% Porque hemos lanzado 100 chinchetas en total y 66 han caído hacia arriba.

Enfoque del resultado

En situaciones en las que se demanda tomar una decisión, se transforman las preguntas sobre valores de probabilidad (¿Cuál es la probabilidad de que?) en una decisión dicotómica (¿ocurrirá o no?).

Ante una probabilidad, digamos del 80%, espera el porcentaje exacto de ocurrencia del fenómeno.

Cualquier pequeña desviación del experimento, respecto a sus expectativas, la explica en forma subjetiva.

Ilusión de control

Se corresponde con el hecho de que el sujeto no distingue la diferencia entre los juegos de habilidad y los de azar.

El sujeto tiene la creencia de poder controlar el azar. Esta concepción implica falta de comprensión de la aleatoriedad, pues uno de los rasgos de la misma es la **imposibilidad de control**.

Esta creencia se refuerza cuando se incrementa la motivación (por ejemplo, si se espera un fuerte premio) y la persistencia (cuanto más se juega o se gana más veces).

ANTES DE LA EXPERIMENTACIÓN

- a) Antes de jugar. ¿Qué número elegirías si quieres ganar y por qué?

Podría ser el 6 porque la parte más grande es la de el 6 y ~~esta~~ esta casilla está hacia el otro

TRAS LA EXPERIMENTACIÓN

- c) Observa el resultado. Si tuvieses que elegir de nuevo un caballo, ¿qué número elegirías y por qué?

Ninguno porque el 6 no me ha defraudado. **¡¡ VIVA EL 6 !!** El 1 tampoco me ha defraudado, estoy orgulloso de ti 1.

La ilusión de control (Langer, 1982) se corresponde con el hecho de que el sujeto presenta la creencia de controlar el azar que se refuerza con aspectos afectivos como la motivación o la persistencia.

Ejemplos de estudiantes

ANTES DE LA EXPERIMENTACIÓN

- a) Antes de jugar. ¿Qué número elegirías si quieres ganar y por qué?

El 4 por que me da buena espina y
endima me gusta el numero

TRAS LA EXPERIMENTACIÓN

- c) Observa el resultado. Si tuvieses que elegir de nuevo un caballo, ¿qué número elegirías y por qué?

El 6 porque ha salido denaciado a la
truca

Sesgos referidos al lenguaje

Otra dificultad en la estimación probabilística se debe a la imprecisión del lenguaje ordinario.

A una misma expresión, relativa a fenómenos que pueden o no pueden ocurrir, personas diferentes suelen atribuir distintos grados de probabilidad.

- dudoso
- quizás
- casi seguro
- poca probabilidad

Ayudar a los estudiantes a distinguir entre situaciones que exigen una descripción precisa de probabilidades y las que no.

PROPUESTA DE SITUACIONES DE APRENDIZAJE

DINÁMICA DE AULA



COMUNICACIÓN

Oral

Escrita



Socioafectivo

Gestión del error
Escucha efectiva

DISEÑO DE LAS TAREAS

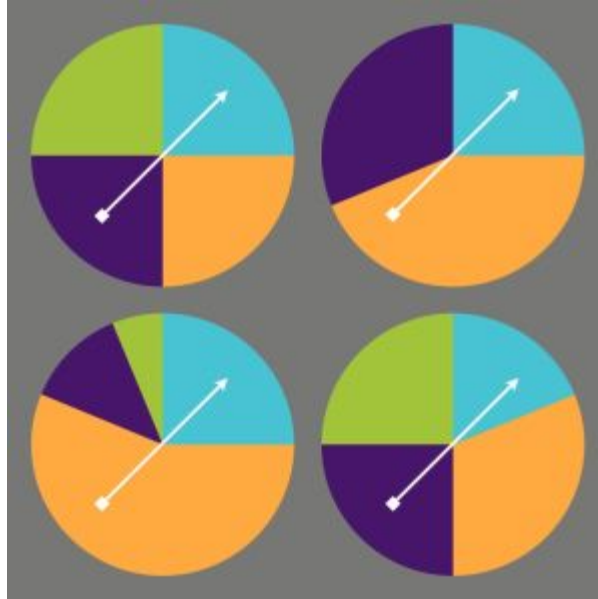
La situación se presenta al estudiante como un juego en el que la mejor estrategia exige la construcción de conocimiento matemático que pone en juego estrategias para medir el grado de incertidumbre.

La pregunta inicial permite la oportunidad de que emerjan las creencias previas que el estudiante ha construido en torno a la situaciones aleatorias.

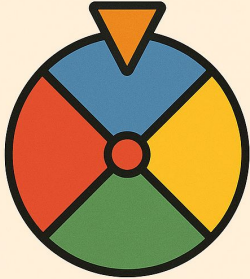
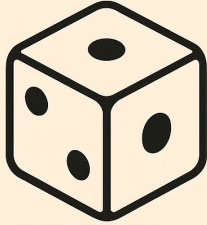
La experimentación no solo pone en juego el significado frecuencial de la probabilidad sino que a través de este significado damos la oportunidad al alumno de revisar sus creencias previas atendiendo al análisis de resultados que se obtienen desde la experimentación.

Tareas WOBD

¿Cuál es el intruso?



DISEÑO A TRAVÉS DE LA IAG



El cronómetro no genera resultados aleatorios, mientras que los otros tres sí.

La ruleta tiene más de dos o seis resultados posibles, a diferencia de la moneda y el dado.

La moneda solo tiene dos resultados posibles, lo que la hace diferente en complejidad.

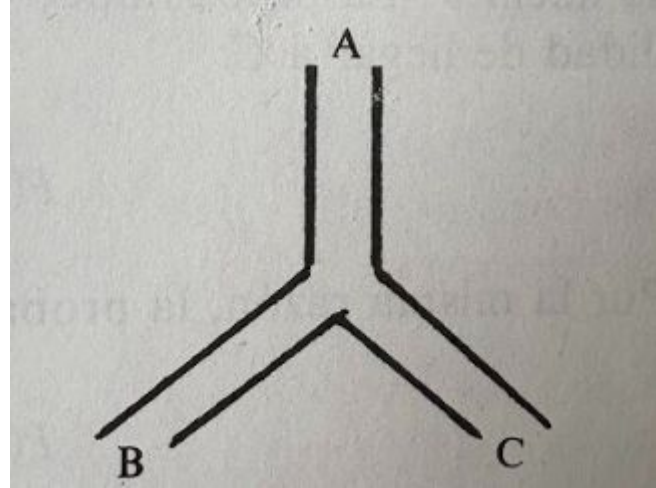
El dado tiene resultados numéricos, mientras que la ruleta puede tener colores o símbolos

El diagrama de árbol

Bifurcación por canales y laberintos

Si echamos 100 bolas, ¿Cuántas crees que pasarán, aproximadamente por B y por C?

¿Cuál es la probabilidad de la bola caiga por el canal B?

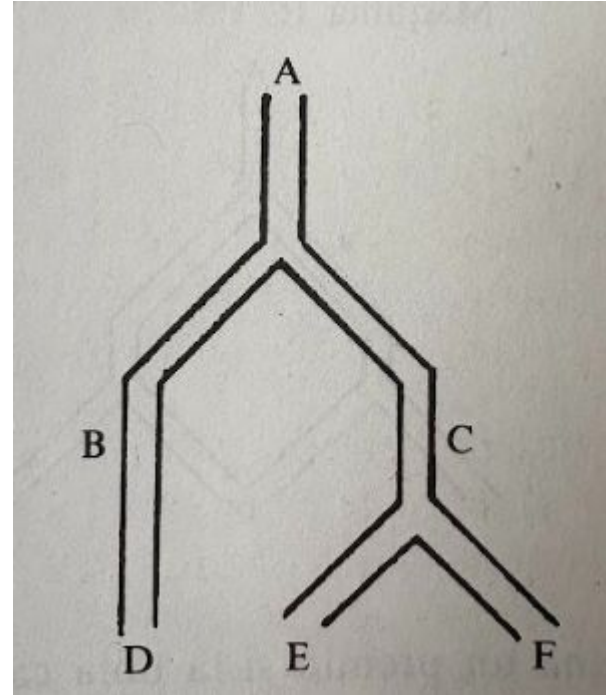


Bifurcación por canales y laberintos

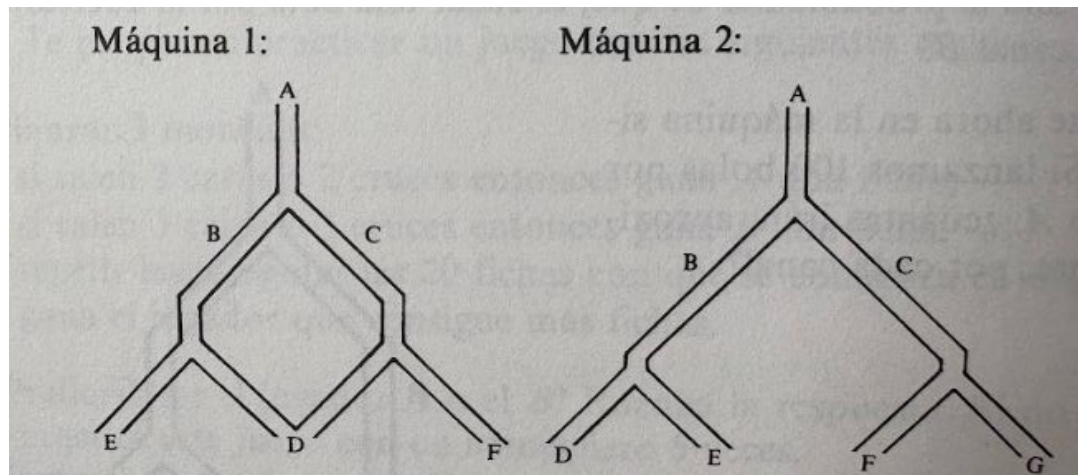
Si echamos 100 bolas, ¿Cuántas irán, aproximadamente, por cada canal?

¿Cuál es la probabilidad de la bola caiga por el canal D?

¿Cuál es la probabilidad de la bola caiga por el canal E?



Juan e Isabel van a la feria. Encuentran una atracción que tiene dos máquinas como las que se muestran en la imagen:



Si gana un premio si la bola sale por D. ¿En qué máquina jugarías? ¿Podrías calcular la probabilidad de que la bola caiga en D en cada caso?

Diagrama de árbol

Una herramienta que permite representar la estructura de problemas combinatorios y probabilísticos.

Ayudan a determinar el espacio muestral en los experimentos compuestos.

La construcción del diagrama de árbol ayuda a comprender la estructura del experimento.

INVESTIGACIÓN

Épsilon - Revista de Educación Matemática

2018, n° 100, 49-63

El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria

Antonio Francisco Roldán López de Hierro

Universidad de Granada

Carmen Batanero

Universidad de Granada

Pablo Beltrán-Pellicer

Universidad de Zaragoza e IES Valdespartera

Resumen: Los diagramas de árbol permiten representar la estructura de muchos problemas combinatorios y probabilísticos, facilitando su resolución. No obstante, la investigación sobre el tema muestra la existencia de dificultades en la construcción e interpretación de diagramas de árbol por parte de los estudiantes, posiblemente debido a que en la enseñanza no reciben la atención necesaria. En este artículo analizamos las propiedades del diagrama de árbol y las dificultades experimentadas en el trabajo con los mismos descritas en la investigación previa. Finalmente mostramos ejemplos de las oportunidades de aprendizaje que ofrece en la combinatoria y probabilidad, incluyendo la argumentación de algunos teoremas. Como conclusión, sugerimos la necesidad de su uso, desde edades tempranas, para conformar intuiciones correctas que luego se aplicarán durante todo el período de formación en probabilidad y combinatoria.

Palabras clave: Diagrama de árbol, intuiciones, probabilidad, combinatoria.

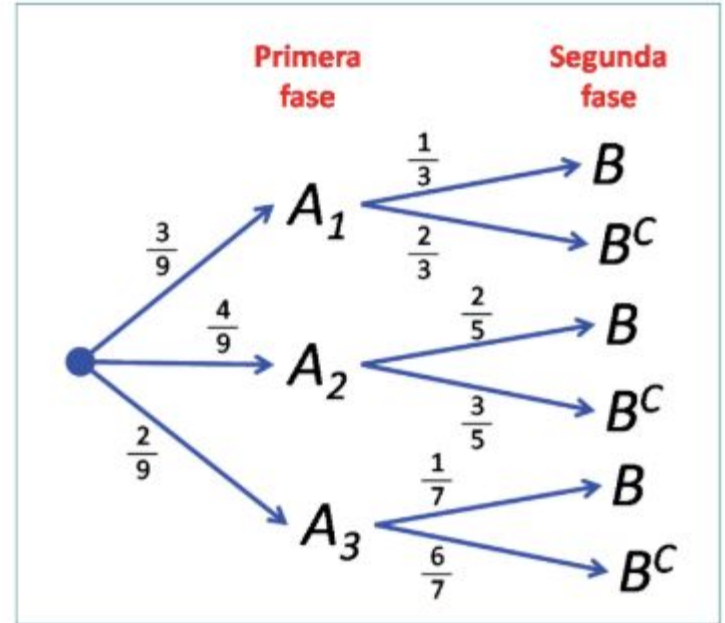
Tree diagram: an intuitive resource in probability and combinatorics

Abstract: Tree diagrams allow representing the structure of many combinatorial and probabilistic problems, facilitating their resolution. However, research on this topic shows the existence of difficulties in the construction and interpretation of tree diagrams by students, possibly because they do not receive the necessary attention in teaching. In this work we analyze the properties of tree diagrams and the difficulties when working

Regla del producto

$$P(A_1 \cap B^C) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

¿Cómo dar significado al diagrama y relacionarlo con el desarrollo aritmético?

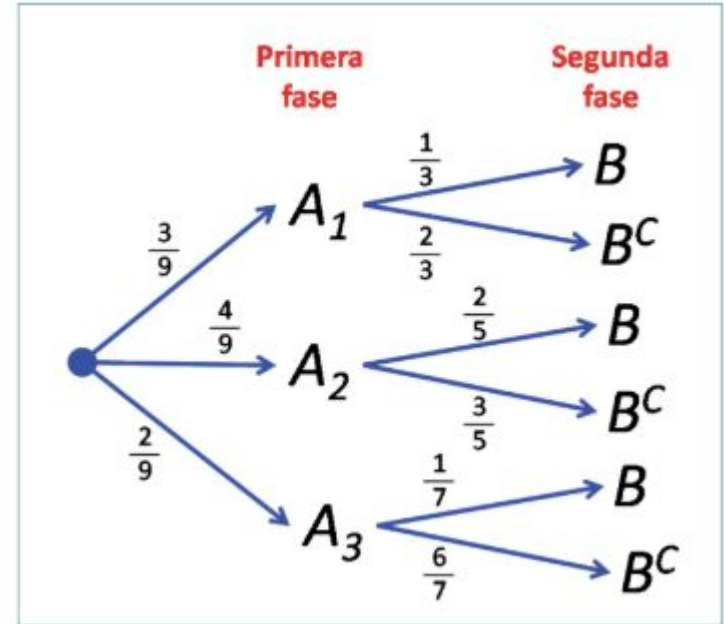


Regla del producto

$$P(A_1 \cap B^C) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

¿Cómo dar significado al diagrama y relacionarlo con el desarrollo aritmético?

Si el suceso A_1 ocurre tres de cada nueve veces que repetimos la experiencia ($3/9$) y, habiendo ocurrido A_1 , el suceso B_c ocurre dos de cada tres veces ($2/3$), entonces en ($2/3$) de ($3/9$) de las ocasiones ocurre el suceso compuesto $A_1 \cap B_c$.



Este argumento tiene que construirse haciendo referencia a los sucesos dentro del contexto del problema, dejando la notación formal para los últimos cursos.

CONEXIONES



Preguntas clave

¿qué proporción de las personas que están de pie esperamos que se sienten en cada lanzamiento de la moneda?

¿podemos predecir con qué frecuencia deberíamos esperar que ocurra un evento?

¿podemos predecir a quién esperamos que le ocurra el evento

EJEMPLOS DE RESPUESTAS:

Tendrías que ir reduciendo a la mitad el número de personas, porque hay un 50% de probabilidad de que salga cara. Entonces, de 250 quedarían aproximadamente 125, porque lo más probable es que el 50% haya sacado cara. Luego, otra vez a la mitad: 63 personas, porque nuevamente hay un 50% de probabilidad, después 31 personas. Al volver a dividir a la mitad: 15 personas, luego 8, después 4, después 2 y finalmente 1 persona.

Así que serían 8 lanzamientos para que quede la última persona en pie y unas 4 personas para que consigan 6 lanzamientos seguidos de cara.

Resolución de problemas

Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen ambas bolas blancas y bolas negras. En la caja A por cada bola blanca hay tres bolas negras. En la caja B hay 20 bolas (entre negras y blancas).

¿Cuántas bolas hay de cada color en la caja B si es igual de probable sacar una bola blanca que en la caja A? Explica tu respuesta.

En la caja A, por cada bola blanca hay tres negras, de manera que, si hubiese 4 bolas, una sería blanca. Puesto que la probabilidad es el cociente entre el número de casos favorables (bolas blancas) y el de casos posibles (bolas totales), para que sea igual de probable sacar bola blanca en la caja B que en la caja A, de cada 4 bolas en la caja B una tiene que ser blanca.

Dado que hay 20 bolas en total en la caja B, se pueden formar 5 grupos de 4 bolas, pues $20:4 = 5$. Esto supone un total de 5 ($5 \times 1 = 5$) bolas blancas en la caja B. El resto, $15 = 20 - 5$, serán bolas negras.

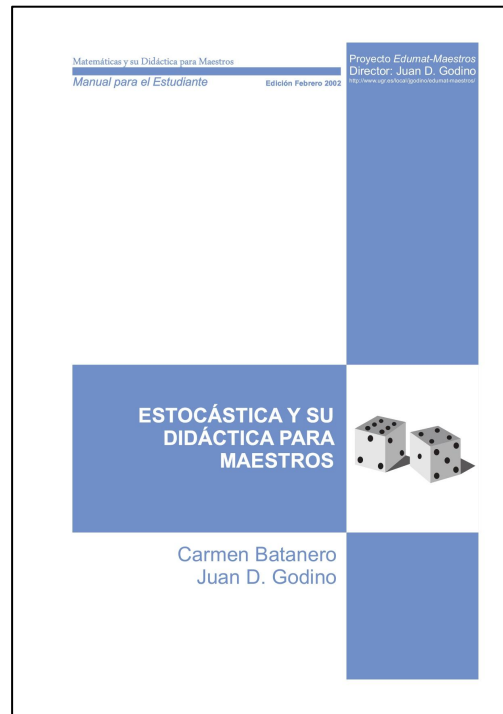
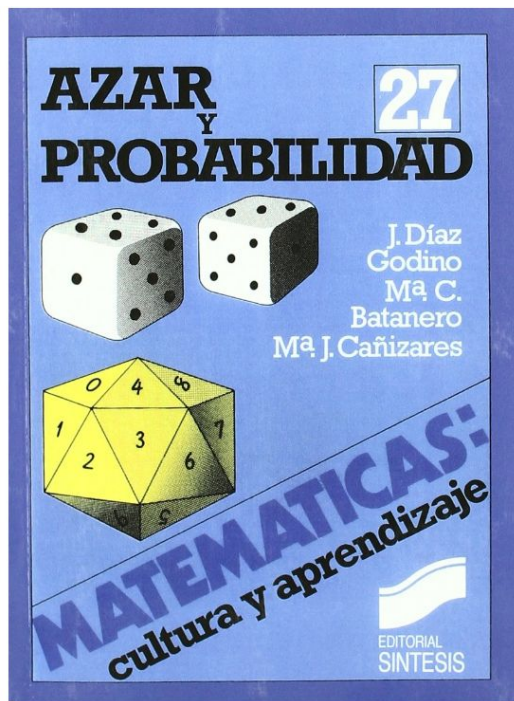
Para que sea igual de probable sacar una bola blanca en la caja B que en la caja A se debe mantener la razón de bolas blancas (casos favorables) respecto del total de bolas (casos posibles). Dado que esta razón es de una bola blanca por cada cuatro bolas, y en la caja B hay 20 bolas, el número de bolas blancas en la caja B es $\frac{1}{4} \times 20 = 5$. El resto de las bolas en la caja B, esto es, $20 - 5 = 15$ serán negras.

Para asegurar que la probabilidad de extraer una bola blanca sea igual en ambas cajas, es necesario mantener la proporción de bolas blancas (eventos favorables) con relación al total de bolas (eventos posibles). Se desconoce el número de bolas blancas y negras que hay en la caja A, pero dado que por cada bola blanca hay tres negras, la razón entre los casos favorables y posibles en A es de 1 a 4. La igualdad de probabilidad entre ambas cajas establece una proporción:

$$\frac{\text{Casos favorables en A}}{\text{Casos posibles en A}} = \frac{\text{Casos favorables en B}}{\text{Casos posibles en B}}$$

donde son conocidos la razón de casos favorables y posibles en A, 1 a 4, y el número exacto de casos posibles en B, 20, desconociéndose el número de casos favorables en B, x . Esta proporción se expresa como $\frac{1}{4} = \frac{x}{20}$. Dado que, en una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de medios, $4x = 1 \times 20$, por lo que $x = \frac{20}{4} = 5$. Por tanto, en la caja B hay 5 bolas blancas y el resto, 15, son negras.

RECURSOS

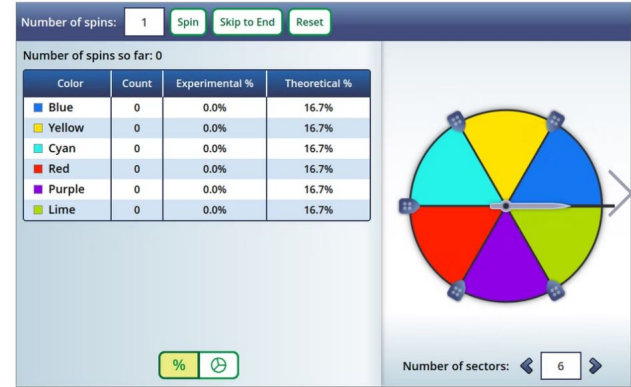


RECURSOS



<https://polypad.amplify.com/p>

MATERIALES



<https://www.dashofresearch.com/virtual-manipulatives/adjustable-spinner/nctm-illuminations>

Chinchetas

Tabas

Dados

Urnas

Ruletas

Monedas...

Referencias

- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (3), pp. 247-263.
- Begué, N. (2019). Comprensión del muestreo y la distribución muestral en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España. <http://hdl.handle.net/10481/58243>
- Burgos, M., López-Martín, M. M., Tizón-Escamilla, N., Aguayo-Arriagada, C. G. (2025). Razonamiento proporcional y algebraico de estudiantes cuando resuelven una tarea probabilística. *PNA*, 19(2), 131-158. <https://doi.org/10.30827/pna.v19i2.29887>
- Batanero, C. y Godino, J. D. (2003). Estocástica y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada
- Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). Azar y probabilidad. Síntesis.
- Hernandez-Solis, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. y Alvarez-Arroyo, R. (2021). Comparing probabilities in urns: A study with primary school students. *Uniciencia*, 35(2), 1-19. <https://doi.org/10.15359/ru.35-2>.

Referencias

- Roldán López de Hierro, A. F., Batanero, C., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en probabilidad y combinatoria. *Épsilon*, 100, 7–63.
- Santa Engracia de Pedro, J. J., Rodríguez Muñoz, L. J., & Palop del Río, B. (2023). Una situación de aprendizaje para el desarrollo del sentido estocástico en Educación Primaria. *Números*, 113, 63-80.
- Serrano, L., Batanero, C. Ortíz, J.J. y Cañizares, M.J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemáticas*, 10(1), 7-25.