

SENTIDO ESTOCÁSTICO-II

Nuria Begué Pedrosa

ÍNDICE

- ❖ Alfabetización estadística
- ❖ Razonamiento inferencial informal y su conexión con el currículo aragonés.
- ❖ Orientaciones internacionales para el trabajo de la estadística: Materiales y recursos para el desarrollo del razonamiento probabilístico desde la toma de decisiones. El Proyecto de Directrices para la Evaluación y la Instrucción en la Enseñanza de la Estadística (GAISE).

CONSTRUCTOS QUE EMERGEN DESDE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA

RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO

SENTIDO ESTADÍSTICO

ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA

Gal (2002) define la alfabetización estadística mediante dos dimensiones: la capacidad de interpretar correctamente los datos y la información estadística, y la capacidad de discutir o comunicar las opiniones al respecto.

RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO

En Wild y Pfannkuch (1999) y Pfannkuch y Wild (2004) se desarrolla el concepto de razonamiento estadístico, que recoge el modo en el que las personas razonan con ideas estadísticas y dan sentido a la información.

Tipos de razonamiento:

- Reconocimiento de la importancia de los datos.
- Trasnumeración (cambios de representación que facilitan la comprensión).
- **Asunción de la variabilidad.**
- Razonamiento con modelos estadísticos.
- Integración de la estadística en el contexto.

Razonamiento estadístico

Reconocer la necesidad de los datos: es esencial reconocer las situaciones en que es útil el muestreo, el tipo de datos que deben formar parte de la muestra, de qué poblaciones y variables deben recogerse, así como el tamaño de la muestra y el tipo de muestreo necesitado.

Percibir la variabilidad: es importante reconocer la variabilidad en la población, en las muestras de la misma, en la distribución del estadístico muestral y en los datos recogidos. Dos fines importantes de la enseñanza de la estadística son que los estudiantes perciban estas fuentes de variabilidad y manejen modelos que permitan controlarla y predecirla.

Razonamiento estadístico

Razonar con modelos estadísticos: los estudiantes necesitan diferenciar los datos que forman parte de la muestra (realidad) y del modelo (población), posiblemente descrito por una distribución como la binomial o normal. Se debe fomentar tanto la competencia para generar muestras a partir de un modelo de población, como la de caracterizar el modelo de población y estimar sus parámetros a partir de una muestra.

Integrar la estadística y el contexto: se refiere a la capacidad de interpretar los resultados del muestreo desde el contexto en que se recogieron los datos, para saber qué dicen de la población. Esta competencia es crucial, pero muchos estudiantes que realizan los cálculos estadísticos sin problema, tienen dificultad en interpretar los resultados dentro del contexto.

SENTIDO ESTADÍSTICO

Batanero (2013) distingue tres componentes: la comprensión de las ideas fundamentales en la estadística, el análisis de datos y el razonamiento y la toma de decisiones a partir de ellos.

CARACTERIZACIÓN DE ESTAS IDEAS EN EL CURRÍCULO AUTONÓMICO

El sentido estocástico se orienta hacia el ***razonamiento y la interpretación de datos y la valoración crítica y la toma de decisiones a partir de información estadística***, además de la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios en situaciones cercanas y significativas para el alumnado.

[...] No se trata de ver la media, moda y media y los gráficos una y otra vez. De hecho, conocer las definiciones de las medidas de posición central y saber calcularlas no sirve de nada si luego no se ponen en juego los problemas relacionados con esos conceptos. [...]

[...] cobra especial importancia y es un sentido clave para crear ciudadanos informados con suficientes conocimientos y competencias para que ante fenómenos aleatorios y tratamiento e interpretación de datos e informaciones sean personas difícilmente manipulables y sean capaces de tomar decisiones y formarse opiniones de forma crítica y razonable.

CARACTERIZACIÓN DE ESTAS IDEAS EN EL CURRÍCULO AUTONÓMICO

El sentido estocástico se orienta hacia el *razonamiento y la interpretación de datos y la valoración crítica y la toma de decisiones a partir de información estadística*, además de la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios en situaciones cercanas y significativas para el alumnado.

[...] No se trata de ver la media, moda y media y los gráficos una y otra vez. De hecho, **conocer las definiciones de las medidas de posición central y saber calcularlas no sirve de nada** si luego no se ponen en juego los problemas relacionados con esos conceptos. [...] *Tomado del currículo autonómico para la etapa primaria.*

[...] cobra especial importancia y es un sentido clave para crear **ciudadanos informados con suficientes conocimientos y competencias** para que ante fenómenos aleatorios y tratamiento e interpretación de datos e informaciones sean personas difícilmente manipulables y sean capaces de tomar decisiones y formarse opiniones de forma crítica y razonable. *tomado del currículo autonómico para la etapa de secundaria.*

¿Qué resultados
concretos queremos ver
en el aula cuando
trabajamos el bloque de
predictibilidad e
incertidumbre?



Efecto del contexto

Una parte importante de la cultura estadística es la capacidad de enfrentar situaciones estadísticas en diferentes contextos, tanto conocidos como desconocidos (Gal, 2019; Sharma, 2013; Sharma et al., 2011).

Sin embargo, esta tarea no es sencilla, ya que los estudiantes tienden a anteponer creencias personales en lugar de razonamientos basados en el análisis de los datos.

RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL

Sentido estocástico

El saber estocástico aparece subdividido en el currículo en dos bloques

- Distribución e inferencia
- Predictibilidad e incertidumbre

Es algo que obedece a la clásica distinción entre estadística y probabilidad, cuyo nexo de unión más claro es **la inferencia**.

No se trata, por tanto, de una separación estanca.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

LA UNIDAD DE ANÁLISIS ES EL DATO

INFERENCIA ESTADÍSTICA

LA UNIDAD DE ANÁLISIS ES CADA UNA DE
LAS POSIBLES MUESTRAS DE UN MISMO
TAMAÑO

RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL

RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL

Una definición útil de **inferencia informal** es:

“la manera en que los estudiantes usan su conocimiento estadístico informal para elaborar argumentos que respalden inferencias sobre poblaciones desconocidas basadas en muestras observadas” (Zieffler et al., 2008, p. 44).

Marco del razonamiento inferencial informal (Makar y Rubin, 2009)

Datos como evidencia: La inferencia se basa en los datos disponibles y no en la tradición, creencias personales o experiencias individuales.

Generalización más allá de los datos: La inferencia va más allá de una descripción de los datos de la muestra, realizando una afirmación probabilística sobre una población o un mecanismo que produjo los datos de la muestra.

Lenguaje probabilístico: Debido a la variabilidad del muestreo y al grado de representatividad de la muestra, la inferencia es inherentemente incierta y requiere el uso de lenguaje probabilístico

Subcomponentes del lenguaje probabilístico

Variabilidad del muestreo: La inferencia se basa en la comprensión de la variabilidad del muestreo; se expresa desde el entendimiento de que los resultados de muestras representativas son similares y que, por lo tanto, bajo ciertas circunstancias, una muestra puede usarse para una inferencia.

Método de muestreo: La inferencia incluye una discusión sobre el método de muestreo y sus implicaciones para la representatividad de la muestra.

Tamaño de la muestra: La inferencia incluye una discusión sobre el tamaño de la muestra y sus implicaciones para la representatividad de la misma.

Incertidumbre: La inferencia se expresa con incertidumbre e incluye una discusión sobre lo que las características de la muestra, como el método de muestreo empleado y el tamaño de la muestra, implican para la certeza de la inferencia.

¿Cuántos libros leen los estudiantes de primaria del CEIP Newton?

Para responder a esta pregunta, Pedro, María, Luis y Ana, cinco alumnos de 6º de Primaria, elaboran una misma encuesta. Sin embargo, cada alumno elige uno de los métodos que se describe en la Tabla. Lee cada propuesta y evalúa si es correcta o incorrecta de manera justificada. Todos los estudiantes hacen la misma pregunta:

¿Cuántos libros has terminado de leer desde septiembre hasta mayo?

Pedro	Pone en papeles los nombres y apellidos de todos los estudiantes de Educación Primaria del centro escolar (pide listado a dirección del colegio) y elige al azar a 60 estudiantes.
María	Pone en papeles los nombres y apellidos de los estudiantes de cada curso de Educación Primaria en una urna (pide listado a dirección del colegio), seleccionando al azar 10 de cada curso.
Luis	Pregunta a los estudiantes que son miembros del club de lectura.
Ana	Pregunta a todo el alumnado de 6º curso (grupo A, B y C, pide listado a dirección del colegio) y luego elige al azar 60 de esas respuestas.

TIPOS DE ACTIVIDADES QUE APOYAN UN TRABAJO DESDE LA INFERENCIA

Usar datos muestrales para razonar sobre características de una población.

Las actividades que se incluyen en esta categorización requieren que los estudiantes realicen generalizaciones más allá de la muestra hacia la población (Ben-Zvi, 2006; Pratt, Johnson-Wilder, Ainley, & Mason, 2008; Zieffler et al., 2008).

Comparar muestras de datos para razonar sobre posibles diferencias entre poblaciones.

Estas actividades implican la comparación de dos muestras para determinar si existen diferencias, seguida de la generación o prueba de hipótesis para explicar las diferencias observadas (Makar & Confrey, 2002; Makar & Rubin, 2007; Pfannkuch, 2006; Watson & Moritz, 1999).



<https://www.youtube.com/watch?v=XUWD2-tzm5k&t=8s>

SENTIDO DEL PROCESO DE MUESTREO



¿Cómo desarrollar el sentido del muestreo?

Se debe comenzar por actividades de obtención de muestras, utilizando material manipulativo, donde los estudiantes puedan observar la variabilidad muestral y el efecto del tamaño de la muestra sobre dicha variabilidad.

Corregir los sesgos y creencias erróneas de los estudiantes.

Experiencias de simulación utilizando los recursos disponibles en Internet.

¿Cómo desarrollar el sentido del muestreo?

Experiencias de simulación utilizando los recursos disponibles en Internet.

El applet de la colección de Allan Rosman y Beth Chance (<http://www.rossmanchance.com/applets/OneSample.html>):

Visualiza las tres distribuciones que intervienen en el muestreo: la de los datos de la muestra, la distribución de la población y la distribución muestral del estadístico.

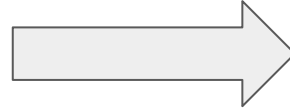
El applet permite cambiar el tipo de distribución, el estadístico que se estudia y el tamaño de la muestra y ver su efecto sobre la distribución muestral.

De la experimentación a la simulación



CODAP

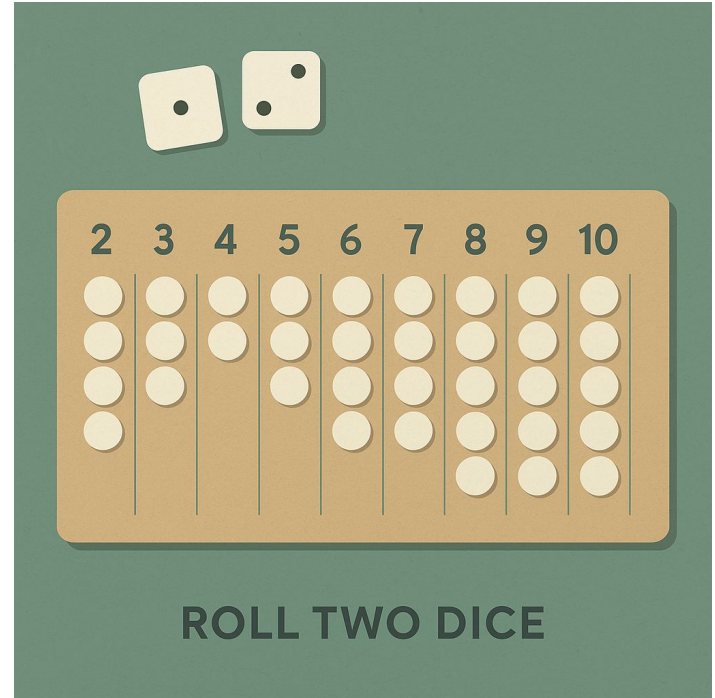
SIGNIFICADO
FRECUENCIAL DE LA
PROBABILIDAD



DESARROLLO DEL
SENTIDO DEL
MUESTREO

BEANO

Cada jugador tiene 12 fichas y se tienen que distribuir por el tablero. En cada partida se lanzan dos dados y se suman los resultados, de modo que cada jugador retira una ficha de su tablero de ese número. Es decir, si al lanzar dos dados sale el número 2 y el número 3, el jugador tendrá que retirar una, y solo una, ficha de la casilla 5. El jugador que consigue quedarse antes sin fichas es el ganador.

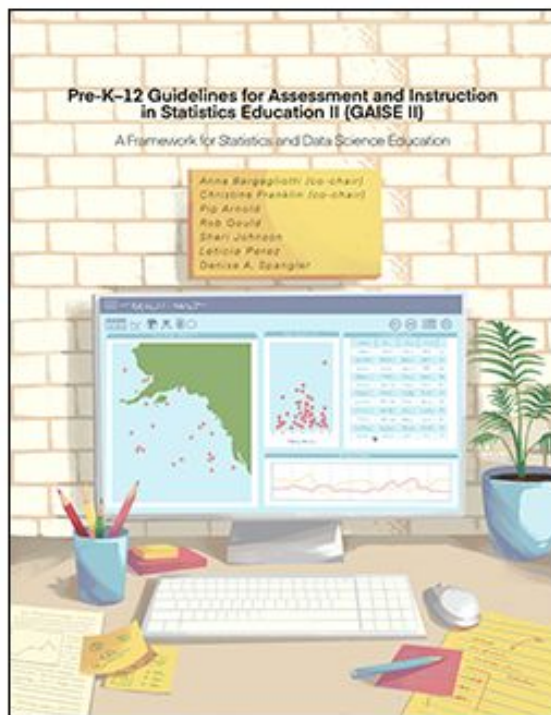




PROYECTOS ESTADÍSTICOS

Trabajar con proyectos estadísticos, donde los estudiantes partan de una situación que les interese (por ejemplo, ¿tienen mayor número de pulsaciones por minuto los chicos o las chicas?), donde necesariamente hayan de recurrir al muestreo

Orientaciones internacionales para el trabajo de la estadística



Statistical Problem-Solving Process

The purpose of the statistical problem-solving process (see Figure 3) is to collect and analyze data to answer statistical investigative questions.

This investigative process involves four components, each of which involve exploring and addressing variability:

- I. Formulate Statistical Investigative Questions
- II. Collect/Consider the Data
- III. Analyze the Data
- IV. Interpret the Results

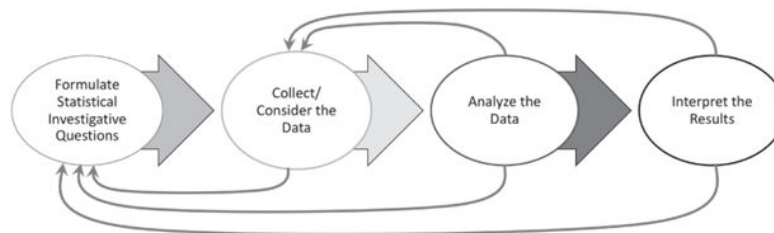


Figure 3: Statistical problem-solving process

Resolución de problemas de estadística

Statistical Problem-Solving Process

The purpose of the statistical problem-solving process (see Figure 3) is to collect and analyze data to answer statistical investigative questions.

This investigative process involves four components, each of which involve exploring and addressing variability:

- I. Formulate Statistical Investigative Questions
- II. Collect/Consider the Data
- III. Analyze the Data
- IV. Interpret the Results

EL PAPEL DE LA
PREGUNTA DE
INVESTIGACIÓN

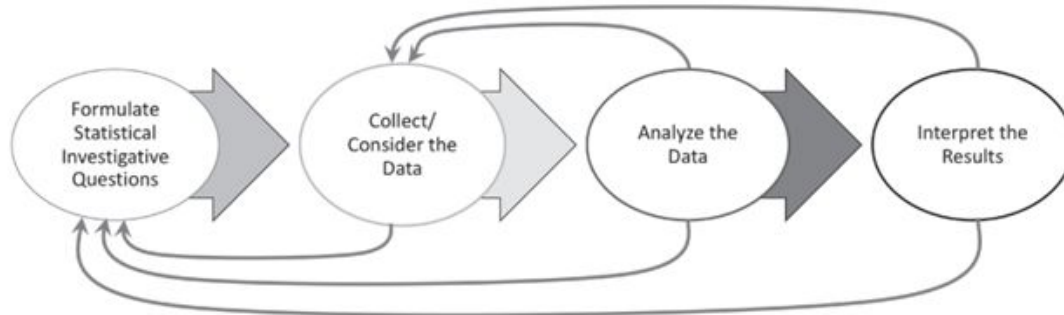


Figure 3: Statistical problem-solving process

Pregunta de investigación

Supongamos que el profesor decide trabajar con nueve alumnos a la vez en el aula y les plantea la siguiente pregunta:

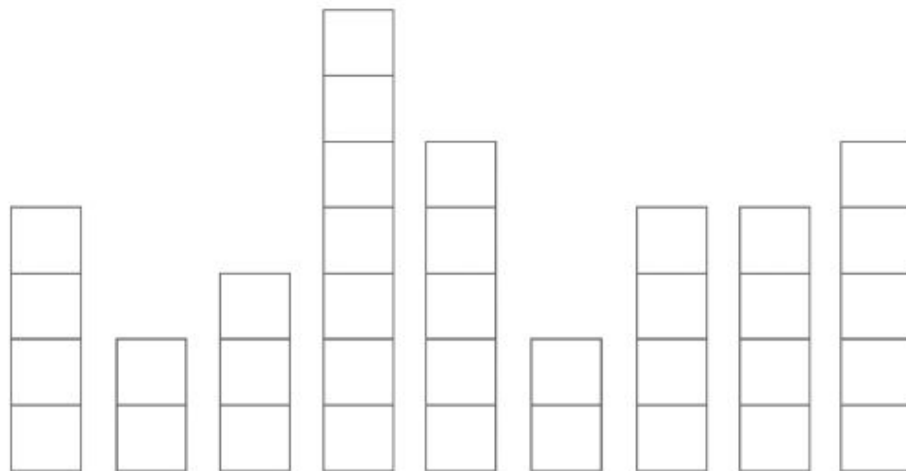
“¿Cuántas personas, incluyéndote a ti, conviven en el hogar donde viviste la mayor parte del año?”

Esta es la pregunta de la encuesta destinada a ayudar a responder la pregunta de investigación estadística planteada anteriormente.

¿Cuántas personas, incluyéndote a ti, conviven en el hogar donde viviste la mayor parte del año?

Los estudiantes deben reconocer que el tamaño de las familias varía. Una pregunta de análisis que el docente podría hacer a los estudiantes es:

¿Cuántas personas habría en cada familia si las nueve familias tuvieran el mismo tamaño?



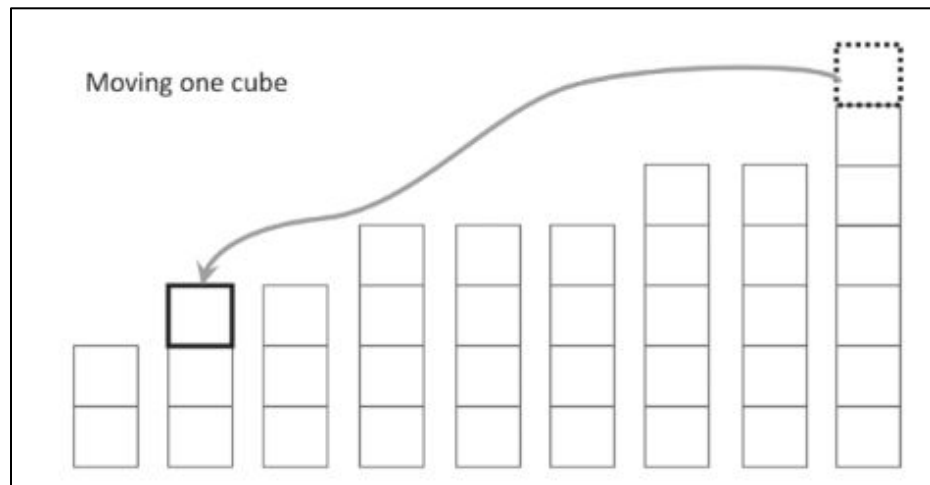
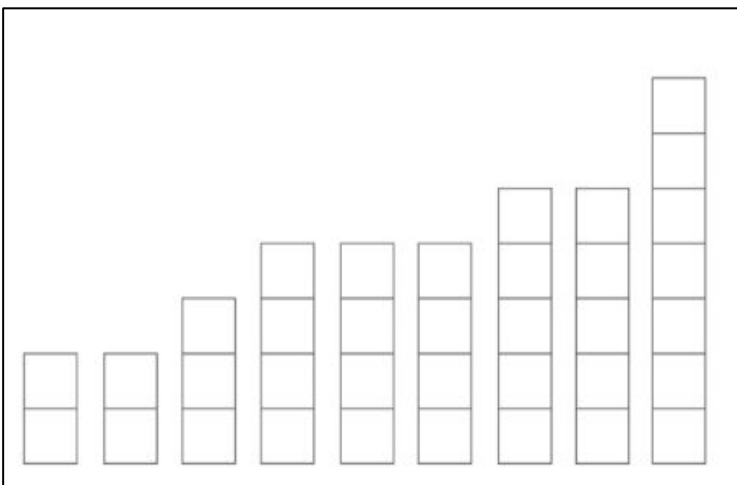
¿Qué parámetro estadístico resuelve la pregunta?

Dar significado a la media

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n}{N}$$

¿Es necesaria la fórmula?

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_K \cdot f_K}{f_1 + f_2 + \cdots + f_K} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^K x_i \cdot f_i}{\sum_{j=1}^K f_j} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^K x_i \cdot f_i}{N}\end{aligned}$$

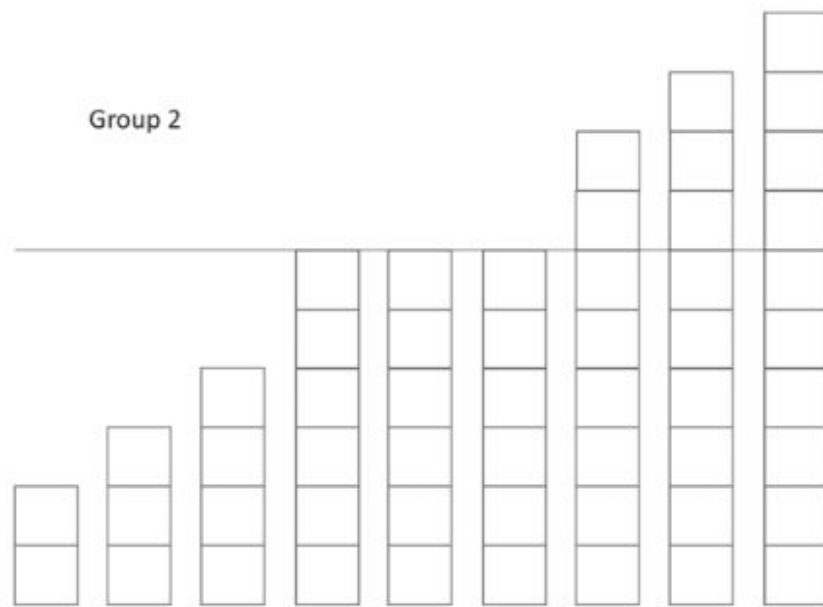
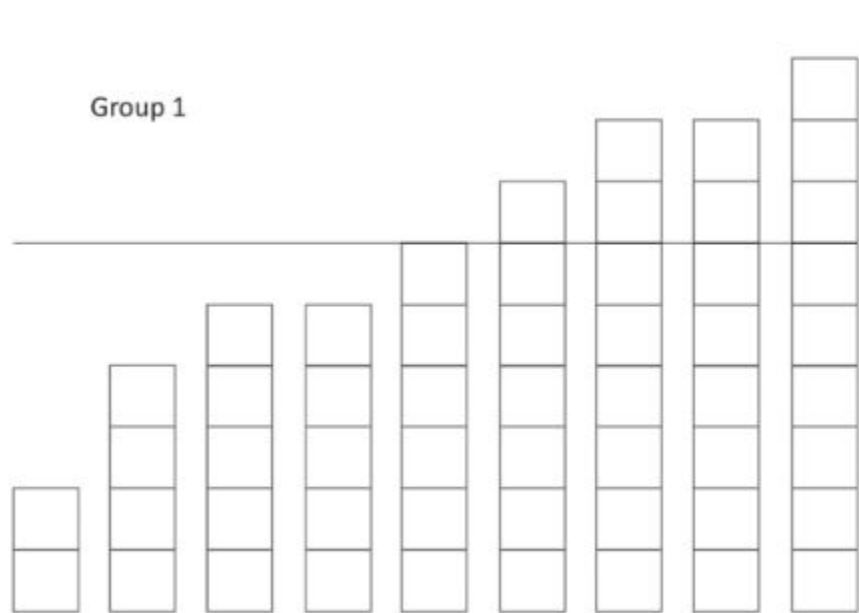


No se trata de ver la media, moda y media y los gráficos una y otra vez. De hecho, conocer las definiciones de las medidas de posición central y saber calcularlas no sirve de nada si luego no se ponen en juego los problemas relacionados con esos conceptos.

Trabajar la idea de variabilidad

Supongamos que otros dos grupos de nueve estudiantes en el aula encontraron que su valor de reparto equitativo era seis.

¿Qué representaciones diferentes con cubos encajables podrían haber construido?



Dado que el valor de reparto equitativo para cada grupo es 6, los dos grupos no pueden distinguirse en función de ese valor. Una posible pregunta de análisis podría ser:

¿Qué grupo está más cerca de ser equitativo?

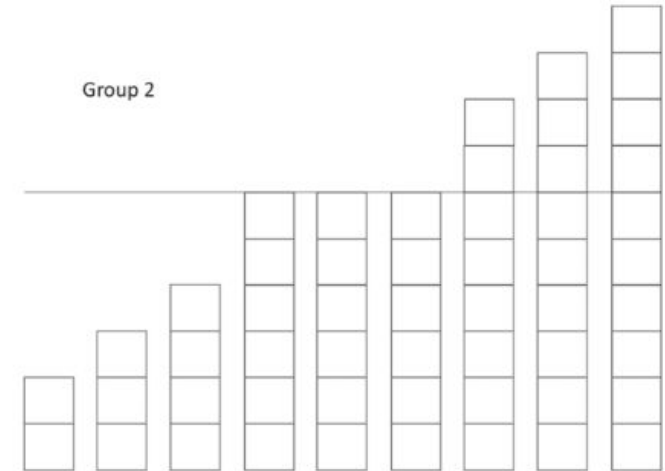
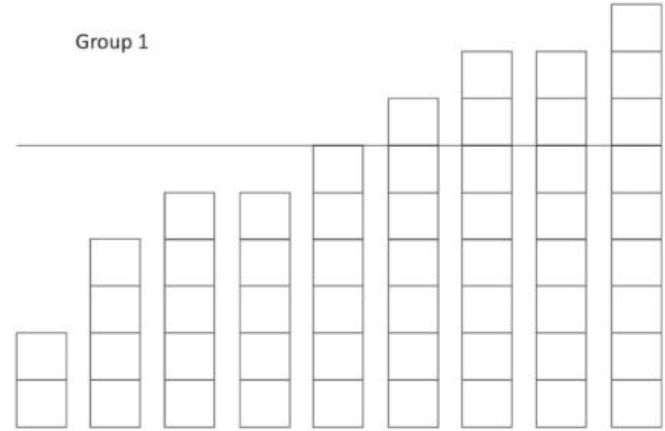
Dado que el valor de reparto equitativo para cada grupo es 6, los dos grupos no pueden distinguirse en función de ese valor. Una posible pregunta de análisis podría ser:

¿Qué grupo está más cerca de ser equitativo?

Los estudiantes podrían dar diferentes respuestas a esta pregunta, entre ellas:

(1) El Grupo 2, porque este grupo tiene la mayor frecuencia de torres de seis cubos encajables.

(2) El Grupo 1, porque en este grupo necesitaríamos mover menos cubos encajables para igualar todas las torres al valor de reparto equitativo de seis.



El segundo método, que consiste en mover menos cubos encajables, puede pensarse como contar el 'número de pasos para igualar', es decir, cuántos pasos en total necesitaríamos para mover los cubos encajables y crear grupos de igual tamaño.

¿Qué significa mover un número menor de piezas para llegar al valor del reparto equitativo?

Un menor número de pasos indica que la distribución está más cerca de ser equitativa y presenta menos variabilidad con respecto a la media.

Los estudiantes de nivel A investigan y comprenden cómo interpretar la media como el valor de participación equitativa y cómo cuantificar la variabilidad con respecto a la media como el número de pasos desde dicho valor.

En el nivel B, los estudiantes avanzarán hacia la interpretación de la media como el punto de equilibrio y la cuantificación de la variabilidad con respecto a la media como la desviación media.

Otra propuesta



Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). Estadística con proyectos. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf>

ESTADÍSTICA CON PROYECTOS

Carmen Batanero
Carmen Díaz
(Editoras)

GRÁFICOS Y TABLAS ESTADÍSTICAS

¿Qué nos dice el currículo?

Los gráficos estadísticos **merecen una especial atención** debido a su omnipresencia en la era de los datos, donde se configuran como un arma de comunicación.

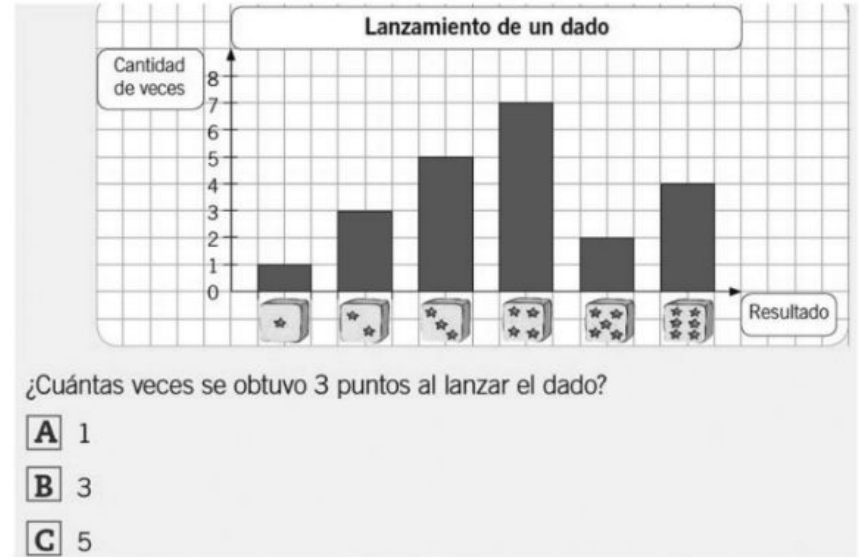
Son uno de los **malos usos de la estadística**, que no se agotan aquí pero que encuentran su cara, quizás, más evidente, en los gráficos manipulados o erróneos que tergiversan los datos y cuentan su propia historia de la situación. Se trata de desarrollar una comprensión profunda de los gráficos que no se limite únicamente a la lectura literal de los datos, sino que se **promuevan los niveles de dificultad (Friel, Curcio y Bright, 2001)**.

NIVELES DE LECTURA DE GRÁFICOS Y TABLAS ESTADÍSTICAS (Fiel et al., 2001)

Nivel 1. Leer los datos

Consiste en la **lectura literal de la información** expuesta en un gráfico o tabla, y corresponde al **nivel más básico de comprensión**.

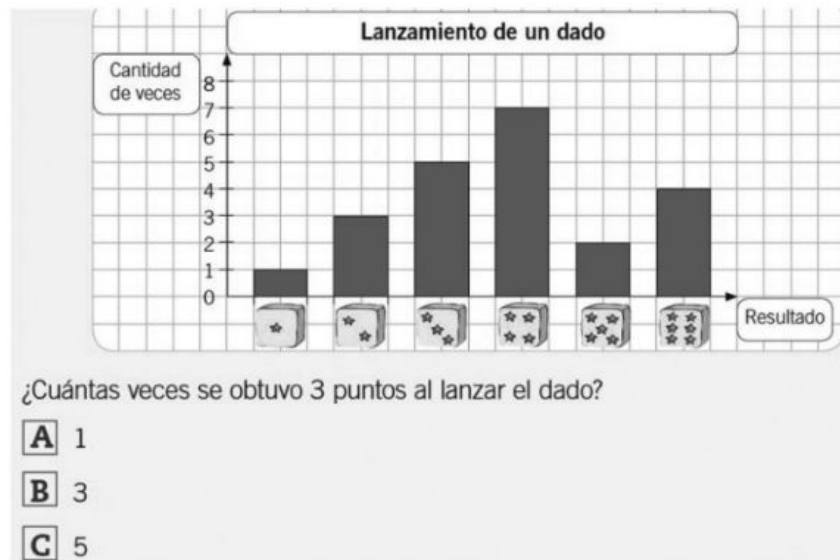
Este nivel se alcanza cuando los estudiantes identifican aspectos elementales de la tabla con el fin de responder a preguntas cuya información se encuentra expuesta de manera explícita, como por ejemplo la lectura del título o de una celda de la tabla.



Nivel 1. Leer los datos

Consiste en la lectura literal de la información expuesta en un gráfico o tabla, y corresponde al nivel más básico de comprensión.

Este nivel se alcanza cuando los estudiantes identifican aspectos elementales de la tabla con el fin de responder a preguntas cuya información **se encuentra expuesta de manera explícita**, como por ejemplo la lectura del título o de una celda de la tabla.

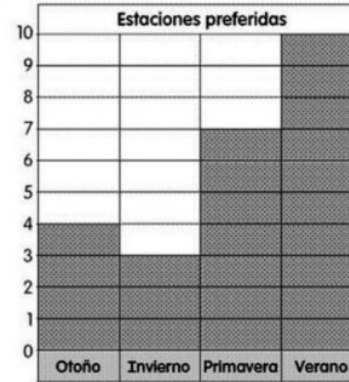


Nivel 2. Leer dentro de los datos

En este nivel, además de obtener la información literal, se es capaz de **realizar operaciones aritméticas o comparaciones con los datos de la tabla, así como encontrar relaciones entre ellos.**

Por ejemplo, **determinar la moda** o calcular el total de datos que corresponden a un rango de valores.

Raúl pregunta a sus compañeros ¿cuál es tu estación del año preferida? Construyó un gráfico de barras para representar los datos.



- (a) ¿Cuál es la estación favorita?
- (b) ¿Cuál es la estación menos preferida?
- (c) ¿Cuántos niños más prefieren el verano que la primavera?



Nivel 3. Leer más allá de los datos

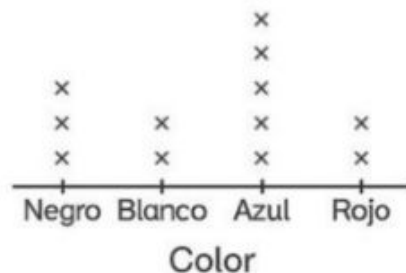
Este nivel implica una lectura de información que no está representada de manera directa en la tabla, sino que **requiere inferencias o razonamientos a partir de los datos.**

Por ejemplo, si la variable es numérica, extrapolar la frecuencia de un valor no representado; o, en una tabla de doble entrada, determinar si existe asociación entre las variables representadas.

José hizo girar 12 veces la rueda giratoria. Sus resultados se muestran en el siguiente diagrama de puntos. ¿Qué color predices que saldrá la próxima vez que José haga girar la rueda?

- Ⓐ Negro
- Ⓑ Blanco
- Ⓒ Azul
- Ⓓ Rojo

Resultados de los giros



Nivel 4. Leer detrás de los datos

Consiste en realizar **una valoración crítica de las conclusiones, así como de la recogida y el tratamiento de la información expuesta en una tabla o gráfico.**

Por ejemplo, juzgar la fiabilidad de la muestra o detectar una posible manipulación de los datos.

Este nivel requiere además conocer el contexto en el que fueron recogidos los datos presentados.

Grupo D Usa el gráfico de la derecha.

1. Pedro llegó a la conclusión de que la noche es el momento que más les gusta a las personas para ir al cine. ¿Es válida su conclusión?
2. La pregunta de la encuesta fue: "A mí me encanta ir al cine. ¿Cuándo prefieres ver películas tú?" Si el gráfico es confuso, explica por qué.



Slow Reveal Graphs

<https://slowrevealgraphs.com/>

¿Qué es un gráfico de revelación lenta?

Comienza con un gráfico al que se le ha quitado el contexto: sus números, sus etiquetas, su título.

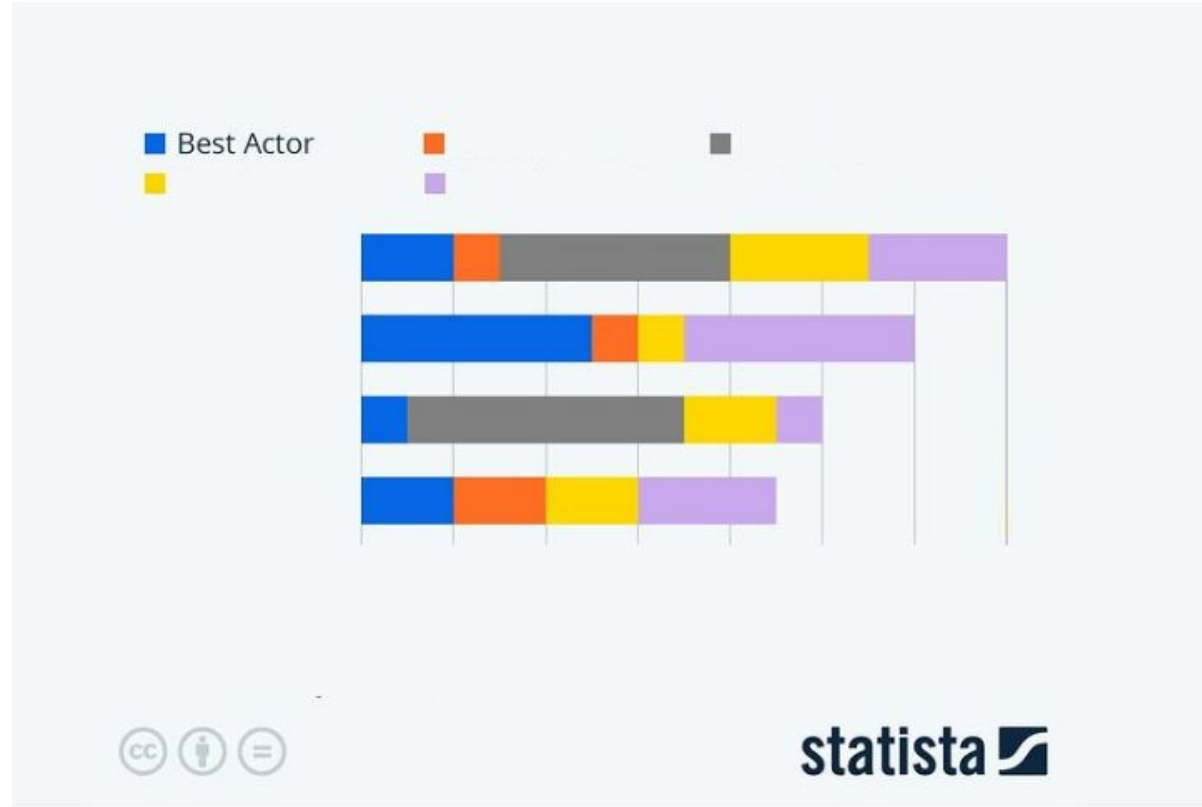
¿Qué observas? ¿Qué te preguntas?



El docente facilita una discusión sobre lo que los estudiantes notan y se preguntan.

¿Qué información nueva acabamos de aprender?

¿De qué contexto podrían provenir estos datos?



Referencias

- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., y Spangler, D. (2020). Pre-K-12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II): A framework for statistics and data science education. American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics. Recuperado de https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEIIPreK-12_Full.pdf.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., & Gea, M. M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 713-737. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a20>
- Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124. <https://doi.org/10.2307/749671>

Referencias

Leavy, A. M. (2010). The challenge of preparing preservice teachers to teach informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 9(1), 46–67. <https://doi.org/10.52041/serj.v9i1.387>