Curso asesores ARCOMAT

Sesión “Sentido algebraico y pensamiento computacional II”

22 de septiembre de 2025

José María Muñoz Escolano (jmescola@unizar.es)

Universidad Zaragoza 1474

Sesión “Sentido algebraico”

Elementos de didáctica del sentido algebraico:

- La transición entre aritmética y álgebra: rupturas en prácticas y significados.
- Distintas visiones del álgebra escolar.
- El proceso de generalización.
- Modelos de enseñanza de ecuaciones.
- Funciones y sus distintas representaciones.

Los procesos matemáticos en el sentido algebraico.

El sentido algebraico en el currículo aragonés.

Materiales y recursos para trabajar el sentido algebraico.

Bibliografía para profundizar en la didáctica del sentido algebraico.

Sesión “Sentido algebraico”

Elementos de didáctica del sentido algebraico:

- La transición entre aritmética y álgebra: rupturas en prácticas y significados.
- Distintas visiones del álgebra escolar.
- El proceso de generalización.
- Modelos de enseñanza de ecuaciones.
- Funciones y sus distintas representaciones.

Los procesos matemáticos en el sentido algebraico.

El sentido algebraico en el currículo aragonés.

Materiales y recursos para trabajar el sentido algebraico.

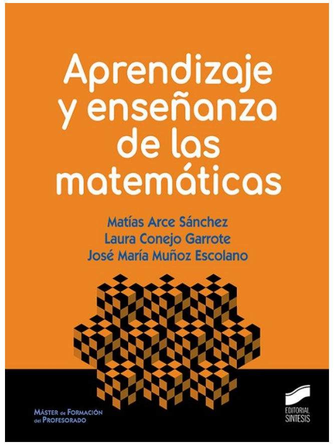
Bibliografía para profundizar en la didáctica del sentido algebraico.

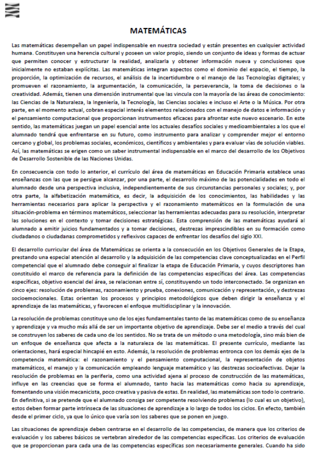
Sesión “Sentido algebraico”

Elementos de didáctica del sentido algebraico:

- La transición entre aritmética y álgebra: rupturas en prácticas y significados.
- Distintas visiones del álgebra escolar.
- El proceso de generalización.
- Modelos de enseñanza de ecuaciones.
- Funciones y sus distintas representaciones.

Fuentes principales:




MATEMÁTICAS

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz-Escolano, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Editorial Síntesis.

Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón (DECD) (2022). *Ordenación curricular.* https://educa.aragon.es/en/ordenacion-curricular1

El problema de la transición de la aritmética al álgebra

La introducción del pensamiento algebraico supone cambios en la manera de hacer y de pensar de los estudiantes que hasta el momento están situados en un modo de hacer y de pensar propio de la aritmética.

Esta transición va más allá del empleo de “letras” y del conocimiento de nuevas técnicas.

El algebra temprana (*early algebra*) identifica algunos aspectos propios del pensamiento algebraico y propone fomentarlos desde las primeras etapas escolares.

Transición de la aritmética al álgebra

- Hacer consciente al alumnado que el quehacer algebraico supone **una ruptura** con muchas de las prácticas matemáticas realizadas hasta ese momento.
- Atender a los **aspectos relacionales** entre operaciones y no simplemente al cálculo de una respuesta numérica.
- Replantearse el **significado del signo igual y de los signos operacionales**.
- Abordar el trabajo con **números y letras**, en lugar de solo con números.

Para ello es necesario:

(i) trabajar con letras que a veces son incógnitas, variables o parámetros;

(ii) aceptar como respuestas válidas expresiones no cerradas con letras;

(iii) comparar expresiones en igualdades mediante propiedades en lugar de mediante la evaluación numérica.

Diferencias en los procesos de resolución de problemas y de modelización.

En un taller de confección disponen de 3 piezas de tela de 50 m cada una. Con ellas van a confeccionar 30 trajes que necesitan 3 m de tela cada uno. Con el resto de la tela piensan hacer abrigos que necesitan 4 m de tela cada uno. ¿Cuántos abrigos pueden hacerse?

Hay 60 pájaros en tres árboles. Después de escuchar un disparo vuelan 6 pájaros del primer árbol, 8 pájaros del segundo y 4 pájaros del tercero. Si ahora hay el doble de pájaros en el segundo que en el primer árbol, y el doble en el tercero respecto al segundo, ¿cuántos pájaros había originalmente en cada uno de los árboles?

$P_1)$ $50\,m \times 4$ piezas $- 20$ trajes $\times 3\,m = 140\,m$ de tela sobrante.

$$\frac{140\,m}{4\,m/\text{abrig}} = 35 \text{ abrigos.}$$

$P_2)$

$$2(x-6) = (y-8)$$

$$2(y-8) = z-4$$

$$x + y + z = 60$$

$x = 12$

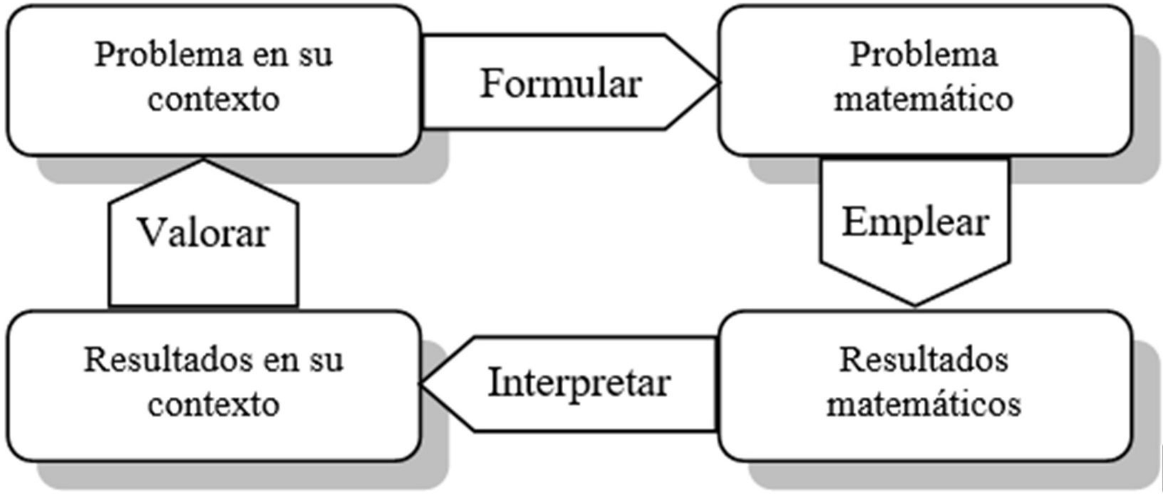
$y = 20.$

$z = 28$

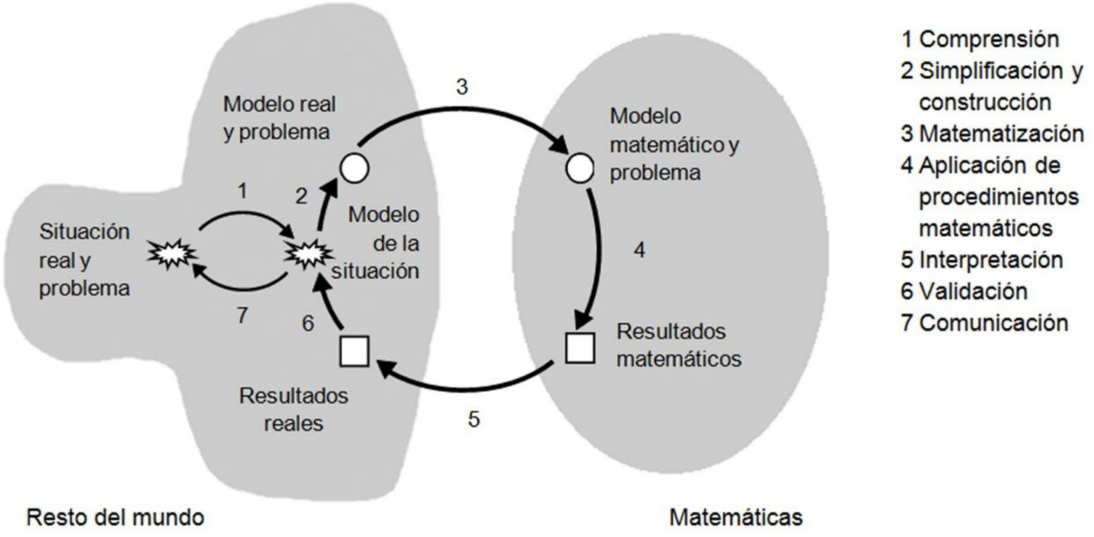
x, y, z nº de pájaros que había inicialmente en cada árbol

Fuente: Producción estudiantes Master de Profesorado Unizar

Quehacer aritmético	Quehacer algebraico
La resolución aritmética de los problemas depende en todo momento del contexto.	La resolución algebraica de los problemas aritméticos tiene fases contextualizadas y descontextualizadas.
Lo desconocido es el final del problema.	Lo desconocido es el principio del problema.
El control de la validez de la resolución es semántico (el contexto justifica el proceso).	El control de la validez de la resolución es semántico (validando la solución con los datos del enunciado) y sintáctico (validando la solución numérica en la ecuación o expresión algebraica).



Ciclo de modelización, según Informe PISA



Ciclo de modelización, según Blum y Leiss

Quehacer aritmético

En las tareas escolares aritméticas se buscan soluciones numéricas.

Las operaciones entre números son procesos de cálculo y los números son objetos finales.

Quehacer algebraico

En las tareas escolares algebraicas el tipo de soluciones se diversifica. Puede ser un número, una fórmula, una relación, una demostración, etc.

Las expresiones algebraicas representan un proceso de cálculo, pero también un objeto final.

a) $x - 3 + 7 - 5 - 4 + 2 \Rightarrow x + 4 - 5 - 4 + 2 \Rightarrow x - 1 - 4 + 2 \Rightarrow x - 5 + 2 \Rightarrow x - 3 =$

-2

a) $x - 3 + 7 - 5 - 4 + 2$

$-3 + 7 - 5 - 4 + 2$

$-3 - 5 - 4 = +7 + 2$

$-12 = 9$

$x = 12 + 9 = 21$

b) $7a - 3b - 5a + 8b = 2a + 5b = 7ab$

Necesidad de clausura

Fuente: Aznárez (2011), Arce y otros (2019), Cid y otros (2024)

Diferencias en los procesos de razonamiento y prueba

Quehacer aritmético

La justificación de los objetos aritméticos, de sus propiedades y relaciones y de las técnicas que les afectan son de tipo retórico o están ligadas al comportamiento de determinados modelos concretos.

Quehacer algebraico

El álgebra permite desarrollar justificaciones basadas en el cálculo algebraico, es decir, permite demostrar las propiedades aritméticas gestionando operaciones y relaciones.

Se plantea la siguiente proposición matemática:

- *“Dadas dos fracciones, mayores o iguales que cero, distintas. Sea la fracción que tiene como numerador la suma de los dos numeradores (de las fracciones dadas) y como denominador, la suma de los dos denominadores. Entonces esa fracción está estrictamente comprendida entre las dos fracciones dadas”.*

Tarea: Justificar o demostrar la proposición anterior dentro de un quehacer algebraico.

Tarea: Justificar o demostrar la proposición anterior dentro de un quehacer aritmético.

Existen distintos modelos concretos para la enseñanza de las fracciones: modelos de parte-todo, de medida, de operador, de razón...

Uno de ellos es el modelo de *cociente partitivo*, donde la fracción $\frac{a}{b}$ tiene el significado de la cantidad que recibe cada uno de los participantes de un reparto igualitario de *a* unidades entre *b* individuos.

$$\frac{5}{3} \; y \; \frac{3}{4} \quad respecto \; a \; \frac{8}{7}$$

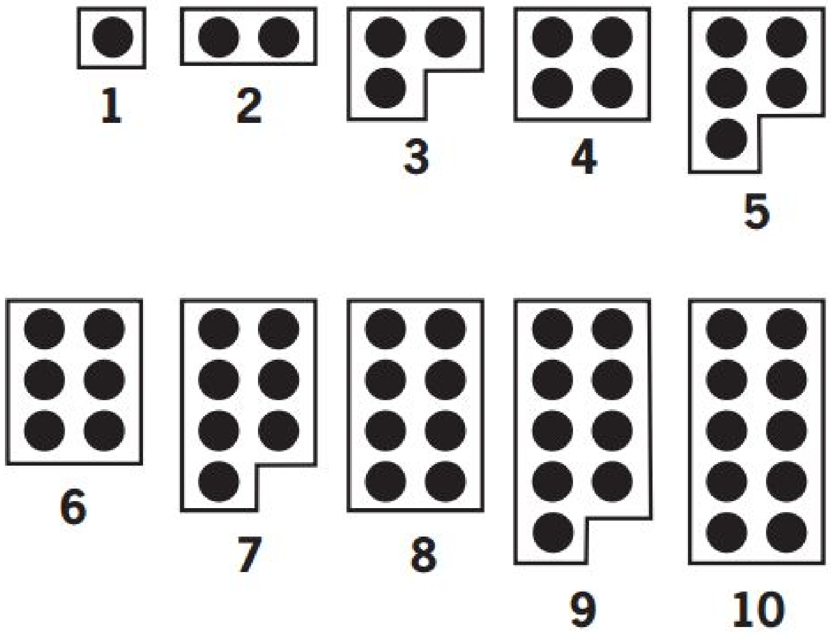
Se plantea la siguiente proposición matemática:

- *“La suma de dos números impares consecutivos es un número par y divisible por 4”.*

Tarea: Justificar o demostrar la proposición anterior dentro de un quehacer algebraico.

Tarea: Justificar o demostrar la proposición anterior dentro de un quehacer aritmético.

Puedes emplear un modelo concreto, tratando a los números impares con la configuración de puntos parecida a las regletas de Herbiniere-Lebert (o Numicon) para resolverlo.



Fuente: https://uk.pinterest.com/pin/384072674452932989/

Distintas interpretaciones de los signos de igualdad y desigualdad (= y ≠) y operativos (+ y -)

Interpretaciones del signo =

Knuth, Stephens, McNeil y Alibali (2006) distinguen:

- *Comprensión operacional*: indicador del resultado de una operación (aritmética).
- *Comprensión relacional*: relaciona las expresiones a ambos lados del igual como expresiones equivalentes (álgebra).

La ausencia de una adecuada comprensión del signo igual está asociada con un bajo desempeño en álgebra. Investigaciones con estudiantes de Secundaria demuestran que una gran parte de ellos únicamente poseen una comprensión operacional del signo igual, por lo que tienen dificultades en la comprensión de las técnicas algebraicas y su ejecución.

Interpretaciones del signo =

Interpretaciones	Ejemplos
Propuesta de actividad. El igual como tecla de calculadora. Se emplea en expresiones incompletas, con una cadena de números o símbolos vinculados por operaciones a la izquierda del igual y un espacio vacío a la derecha.	$16 : 3 =$ $x\,(x+1) - 3x\,(x+5) =$
Operador. El igual separa una secuencia de operaciones, que habitualmente se sitúan a la izquierda, y su resultado, que se dispone a la derecha.	$4\times 5 = 20;$ $x\,(x-2)+3x^2 = 4x^2 - 2x$
Separador. El igual separa los pasos realizados en la resolución de una actividad, habitualmente en contextos algebraicos. Debe ser sustituido por un punto y coma o por símbolos de flecha de implicación o de doble implicación.	$3x+5+7x=-2-1 = 10x=-8.$
Expresión de una identidad (equivalencia). El igual relaciona dos representaciones diferentes de un mismo objeto matemático. Puede ser numérica, simbólica o por definición.	$7\cdot 8 = 4\cdot 14;$ $a + b = b + a;$ $5x^3 + 10x^2 = 5x^2\,(x+2);$ $100\text{ cm} = 1\text{ m}$
Expresión de una ecuación (equivalencia condicional). Cuando la equivalencia solo es cierta para algún o algunos valores de las variables.	$x^2 - 6x + 5 = x + 3$
Expresión de una relación funcional o de dependencia. Indica una relación o dependencia entre variables o parámetros en funciones y fórmulas.	$y = x^2 + 1;$ $A = \pi r^2$

a) $1 + 34 - 21 + 10 - 44 = 1 + 34 = 35 - 21 = 14 + 10 = 24 - 44 = -20$

Fuente: Aznárez (2011)

Interpretaciones de los signos operativos

Operativo binario entre términos sin signo. Cuando los signos indican una operación binaria de suma o resta entre términos sin signo. 7+3=10; 8-5=3

Operativo binario entre términos con signo. Cuando los signos indican una operación binaria de suma o resta entre términos con signo. (-7)**+**(-3)=-10; (+2)**-**(-7)=+9

Operativo unario. Cuando los signos + o – indican que el signo del término al que preceden debe mantenerse o intercambiarse. 5**-** (-3) = 5+3; 4 **–** (x-2) = 4 –x+2

Predicativo. Cuando los signos indican que un número es positivo o negativo.

(**+**3); (**-**7)

Analiza los errores en las producciones de estos estudiantes de 1º de ESO.
¿En qué pasos ocurre y vinculado a qué símbolos?
¿Qué interpretaciones de los signos crees que están detrás de esos errores?

a) $x - 3 + 7 - 5 - 4 + 2 = x - 10 - 5 - 4 + 2 = x - 15 - 4 + 2 = x - 19 + 2 = x - 17$

b) $55 - 27 - 55 + 32 - 12 + 18 + 27 = 28 - 87 - 30 + 27 = -59 - 30 + 27 = 89 + 27 = \boxed{-62}$

c) $(-6)[(+9) - (+2)] - (-3)(-4) \Rightarrow (-6)(+7) - (-7) \Rightarrow -6 + 14 \Rightarrow 8$

Fuente: Aznárez (2011)

Interpretaciones de los signos operativos

Por economía de escritura, en el lenguaje algebraico desaparecen los signos operativos binarios propios de la aritmética, debiendo ser principalmente interpretados como predicativos y unarios.

Por ejemplo, la expresión $3y - 2 + 5 - (2x - 3y)$ se corresponde con:

$$(+3) \cdot y + (-2) + (+5) + (-1) \cdot [(+2) \cdot x + (-3) \cdot y].$$

Una dificultad común a muchos estudiantes que siguen desde la aritmética interpretando los signos como operativos binarios es simplificar la expresión anterior como $3y - 7 - 2x + 3y$.
Otro error habitual, relacionado con la interpretación como operativo unario, sería al convertir $-(2x - 3y)$ en $-2x-3y$.

La desaparición del símbolo del producto también produce errores.

Interpretaciones de las letras

El uso y significado de las letras es una de las mayores dificultades que se encuentran los estudiantes cuando comienzan con el álgebra escolar.

En álgebra, los símbolos literales pueden tomar diferentes valores: incógnitas, números generalizados, variables, parámetros…

En aritmética, las letras toman valores como:

- objeto o etiqueta asociada al número para denotar unidades de medida (7*m* como 7 metros, 4,5*l* como 4,5 litros) o
- nombrar el tipo de objetos que se cuantifican en una colección (3 estudiantes, como 3*e*).

Esta última interpretación puede ser fuente de errores al traducir enunciados como “en mi instituto, cada 20 estudiantes había dos profesores” como $20e=2p$, y

causar dificultades al resolver problemas de programación lineal, por ejemplo, para optimizar el beneficio de vender distintos lotes con frascos de perfumes, simbolizar como *p* tanto el precio de cada frasco de perfume como el número de frascos de perfume que se han vendido.

Interpretaciones de las letras

En ocasiones, esto puede ser fomentado por algunas formas de introducir las letras en el álgebra:

Compro 4 tartas y 3 bizcochos y me gasto 26 euros. Representa esta situación con una expresión algebraica.

Respuesta: $4T + 3B = 26$

(¿Se pregunta después sobre qué representa B y qué representa T?)

20. Los pasteles cuestan p centavos cada uno y las empanadas e centavos cada una.

Si compro 4 pasteles y 3 empanadas,
¿Qué significa

$4p+3e$?

4 pasteles + 3 empanadas

27% de acierto (García, 2016)

22. Los lápices azules cuestan 5 pesos cada uno y los lápices rojos cuestan 6 pesos cada uno.
Si compro algunos lápices azules y algunos rojos y en total me cuestan 90 pesos.

Si a es el número de lápices azules comprados, y
si r es el número de lápices rojos comprados,
¿Qué puede escribir acerca de a y r?

$a + r = 90$

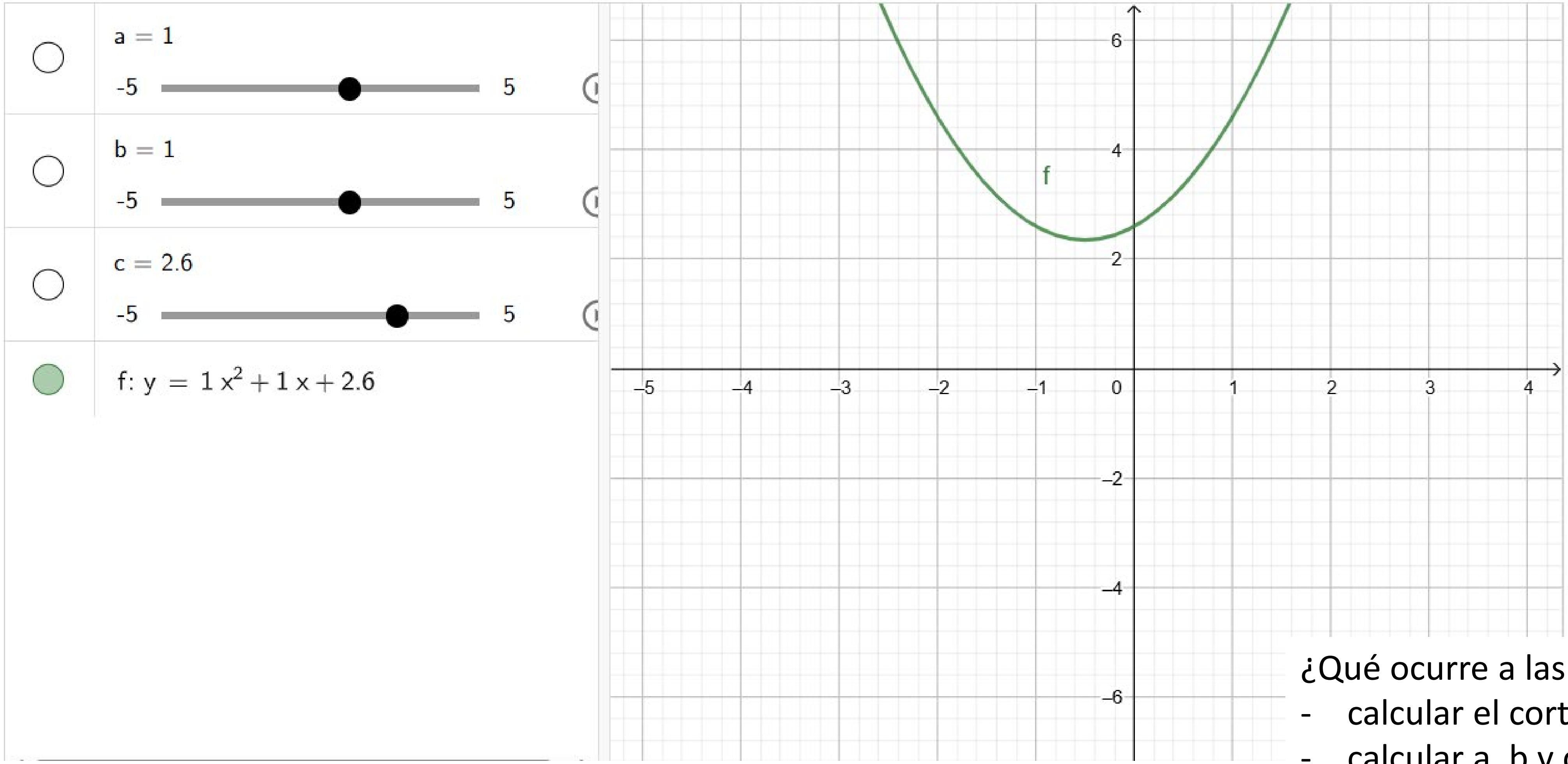
21% de acierto (García, 2016)

Interpretaciones de las letras en álgebra

- *La letra como constante.* Representa un número determinado (e, π, i).
- *La letra como incógnita*. Número desconocido cuyo valor numérico se busca.
- *La letra como variable*. Número que puede tomar cualquier valor en un cierto dominio.
- *La letra como indeterminada*. La letra como un signo en el papel y que no representa ningún número.
- *La letra como parámetro*. En la resolución de ecuaciones o inecuaciones, coeficiente de un término que indica un número desconocido en función del cual se expresará la incógnita.

Observa como varía la gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ cuando se modifican los valores de sus parámetros a, b y c

Utiliza los deslizadores para modificar los valores de los parámetros



¿Qué ocurre a las letras si solicito:

- calcular el corte con el eje y
- calcular a, b y c para que pasen por (-2,0) y (1,0)?

Fuente: https://www.geogebra.org/m/jnt37x5z

Visiones del álgebra escolar

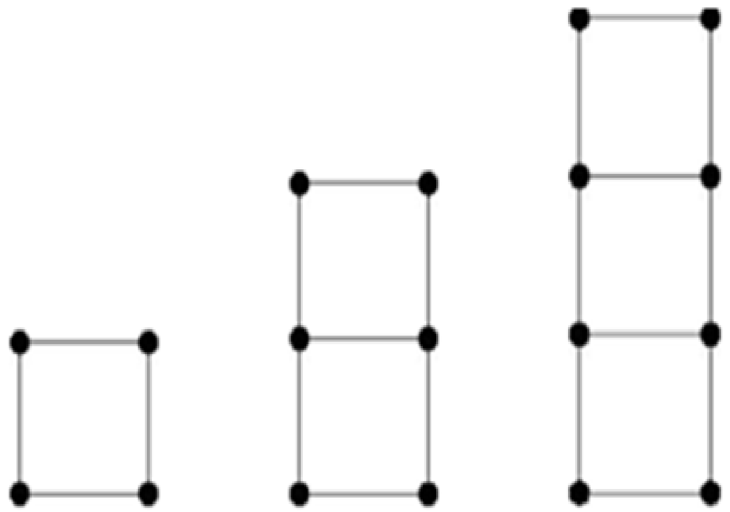
Usiskin (1988) y Socas, Camacho, Paralea y Hernández (1989) identifican y clasifican diferentes concepciones del álgebra escolar, atendiendo al papel que toman las “letras”.

- Aritmética generalizada (número generalizado):
  - Identificar y representar la estructura aritmética a través de patrones y leyes numéricas: $2 \cdot (5+1) = 2\cdot 5 + 2\cdot 1 \rightarrow a(b+c)=ab+ac$
  - Generalización de patrones numéricos y geométricos
- Resolución de ecuaciones (incógnita)
- Funcional (variable)
- Estructural (indeterminada)

La generalización de patrones

El proceso de identificar algebraicamente patrones en una secuencia implica:

(1) tomar conciencia de una propiedad común a los primeros términos,
(2) generalizar dicha propiedad a todos los términos de la secuencia y
(3) usar esa propiedad común para encontrar una regla que permita calcular directamente cualquier término de la secuencia.



Como puedes ver en la imagen, la figura de un cuadrado necesita 4 bolas y 4 palos, la figura de dos cuadrados necesita 6 bolas y 7 palos, la figura de tres cuadrados necesita 8 bolas y 10 palos.

Fuente: Callejo y Zapatera (2014), en Arce y otros (2019)

La generalización de patrones

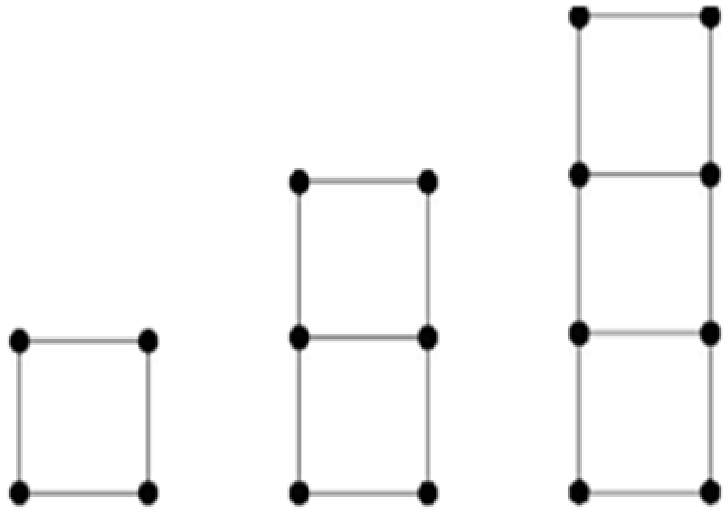
Secuencia prototípica de cuatro tareas de identificación de patrones:

a) Tareas de *generalización cercana*: calcular el valor a_n para un n pequeño y que se puede obtener mediante recuento con material manipulativo, con un dibujo o una tabla.

b) Tareas de *generalización lejana:* calcular el valor de a_n para n grande y que requiere la identificación de un patrón o pauta.

c) Obtención y expresión de la *regla general* que permita calcular el valor de a_n para cualquier n.

d) *Inversión del proceso* para hallar el valor de n, dado el valor de un elemento, a_n, es decir, hallar la posición de un término de la secuencia a partir del número de elementos de dicho término.



1. ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 4 cuadrados?

2. ¿Cuántas bolas y palos se necesitan si construyo una figura de 6 cuadrados?

3. ¿Cuántas bolas y palos se necesitan si construyo una figura de 20 cuadrados?

4. Expresa una regla general que relacione el número de cuadrados y el de bolas.

5. Expresa una regla general que relacione el número de cuadrados y el de palos.

6. ¿XXXXXX?

Fuente: Callejo y Zapatera (2014), en Arce y otros (2019)

La generalización de patrones

- Los estudiantes suelen resolver las generalizaciones cercanas, dibujando y contando los elementos (si son figuras) o empleando *estrategias recursivas* (observan el aumento de la cantidad respecto al término anterior). Se coordinan los registros geométricos y numéricos y aparecen representaciones tabulares.

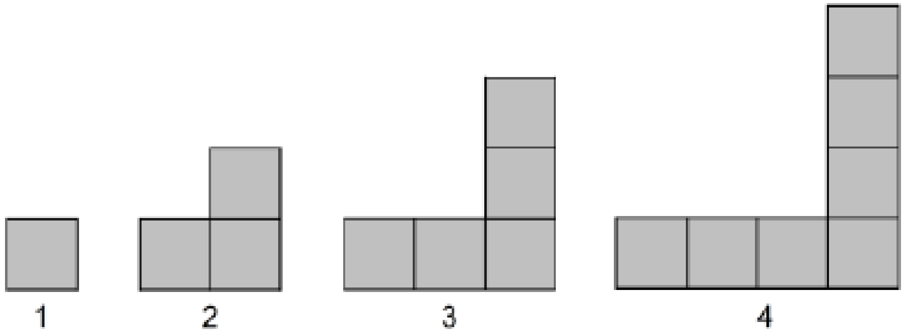
- Al plantear la generalización lejana, que requiere establecer *estrategias funcionales* (es decir, expresar a_n en una expresión algebraica dependiendo de n), que sirven para resolver las tareas de expresión y las de proceso inverso. Aparecen distintas expresiones algebraicas o fórmulas dependiendo de cómo se ha llegado hasta ellas. En este paso se puede investigar la equivalencia de expresiones.

- Una estrategia errónea muy común consiste en aplicar indebidamente procedimientos de proporcionalidad directa o inversa en cualquier patrón.

La generalización de patrones

LOMLOE Aragón. Matemáticas. Sentido algebraico. 2º de ESO. Orientaciones para la enseñanza.

Se presenta al alumnado el siguiente patrón, bien en un dibujo o con el apoyo de material manipulativo (usando policubos, por ejemplo):



A continuación, se plantean las siguientes preguntas: ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar la siguiente figura? ¿Y la figura 6? ¿Y la 10? ¿Y la 215? ¿Puedes encontrar una fórmula general para saber cuántos cuadrados formarán una figura sabiendo el número de orden?

ATENCIÓN: Material manipulativo (con apoyo de policubos)

La generalización de patrones

LOMLOE Aragón. Matemáticas. Sentido algebraico. 2º de ESO. Orientaciones para la enseñanza.

Como vemos se propone que las preguntas se planteen de forma gradual. Es decir, antes de pedir una fórmula general podemos preguntar cómo se forman las figuras inmediatamente posteriores para que el alumnado pueda estudiar la pauta de formación de las figuras (por ejemplo, que se añaden dos cuadrados para pasar de una figura a la siguiente). Poco a poco se puede ampliar el salto entre las figuras, haciendo que sea incómodo dar la respuesta mediante la ampliación de la tabla.

N.º Serie	N.º de cuadrados
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11
...	...
10	19
...	...
215	429
...	...
n	2n – 1

+2
+2
+2

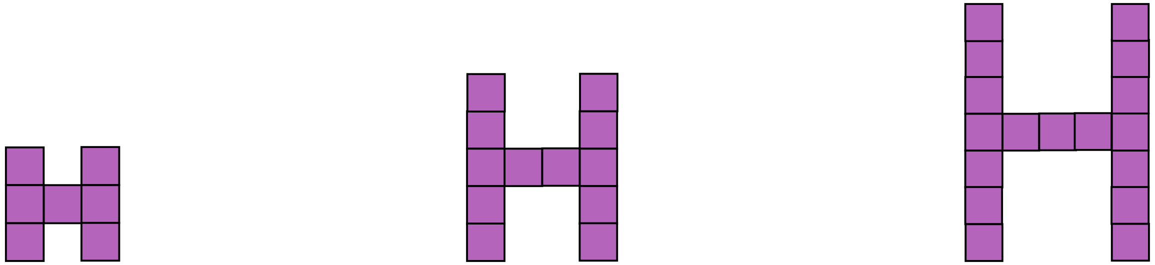
Después de esta exploración se pedirá al alumnado que proponga alguna fórmula para el cálculo del número de cuadrados. Lo más habitual es que se propongan distintas fórmulas, y resulta de interés que el alumnado explique la procedencia de sus propuestas:

$(n - 1) + (n - 1) + 1$, $n + (n - 1)$, $n + n - 1$, etc.

A partir de aquí se puede pasar al cálculo algebraico para comprobar su equivalencia y escoger, entre todas las formulaciones, la que se vea más sencilla para realizar los cálculos de forma eficiente. En Calvo et al. (2016) se sugiere también ampliar la actividad preguntando qué número de orden corresponde a la figura formada por 233 cuadrados o por 116 (y que el alumnado ofrezca distintos tipos de justificaciones para argumentar que 116 no es solución en ningún caso).

Se puede extender la actividad pidiendo al alumnado que represente la información de la tabla en una gráfica, poniendo de manifiesto la relación de dependencia lineal entre el número que representa la posición y el número de cuadrados. El trabajo con otros patrones con el mismo salto y otros de salto constante nos puede llevar, por ejemplo, a la idea de pendiente.

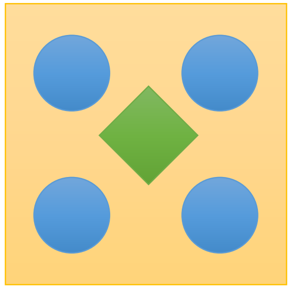
La generalización de patrones



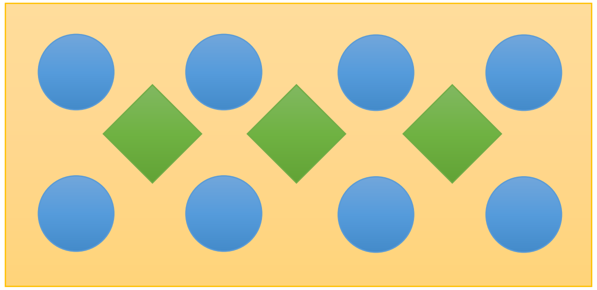
- Averiguar el número de elementos que tiene la figura de la serie que ocupa el lugar 5º
- Averiguar el número de elementos que tiene la figura de la serie que ocupa el lugar 21º
- Averiguar el número de elementos que tiene la figura de la serie que ocupa el lugar 157º
- Averiguar la expresión del término general que permite calcular los elementos que tiene cada uno de los términos de la sucesión.

La generalización de patrones

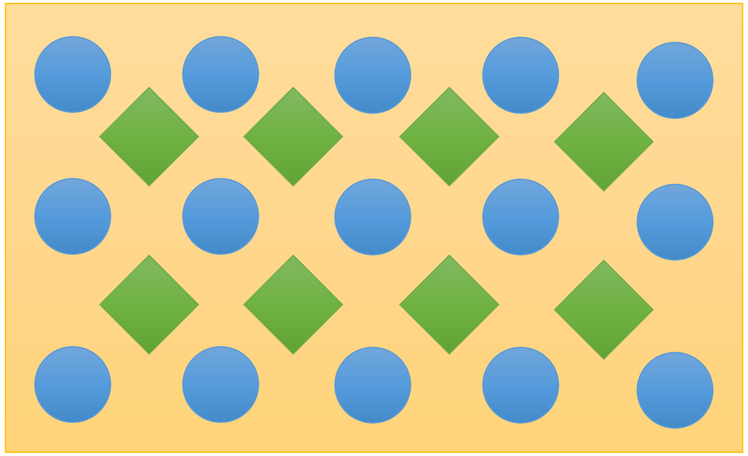
El contenido de las cajas de Superchocolatinas está distribuido siempre de la misma forma. Como muestran las figuras siguientes, entre cada cuatro chocolatinas siempre hay un caramelo:



2x2



2x4



3x5

Las dimensiones de las cajas nos dicen el número de filas y columnas de chocolatinas que tiene la caja.

- Desarrollar un método para encontrar el número de caramelos que hay en una caja si sabemos sus dimensiones.
- Explicar el método usado usando palabras, diagramas o expresiones.

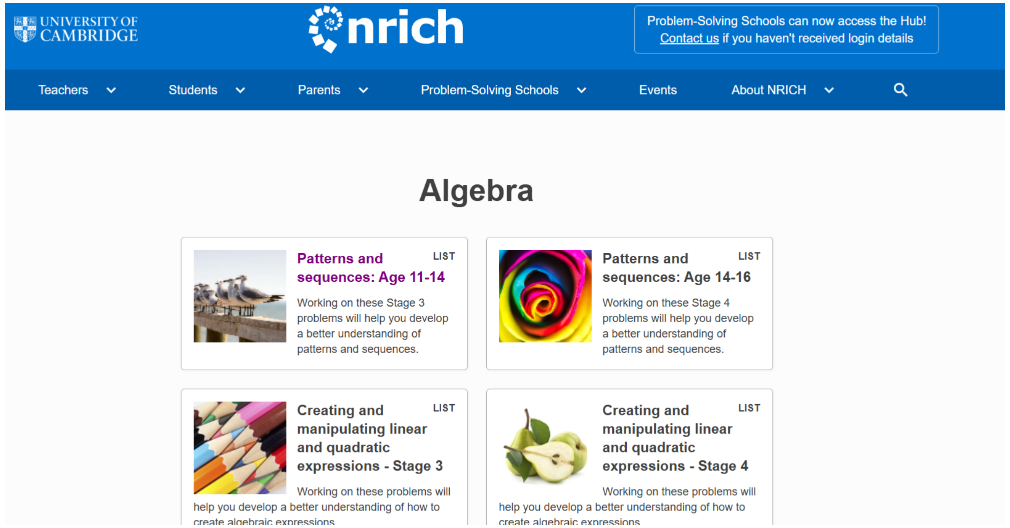
La generalización de patrones

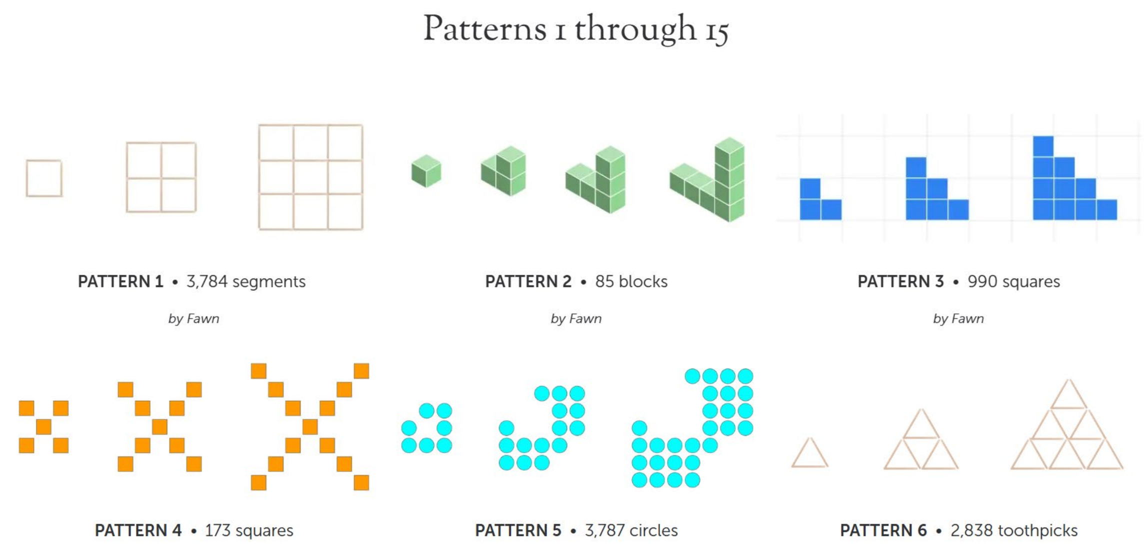
RECURSOS:

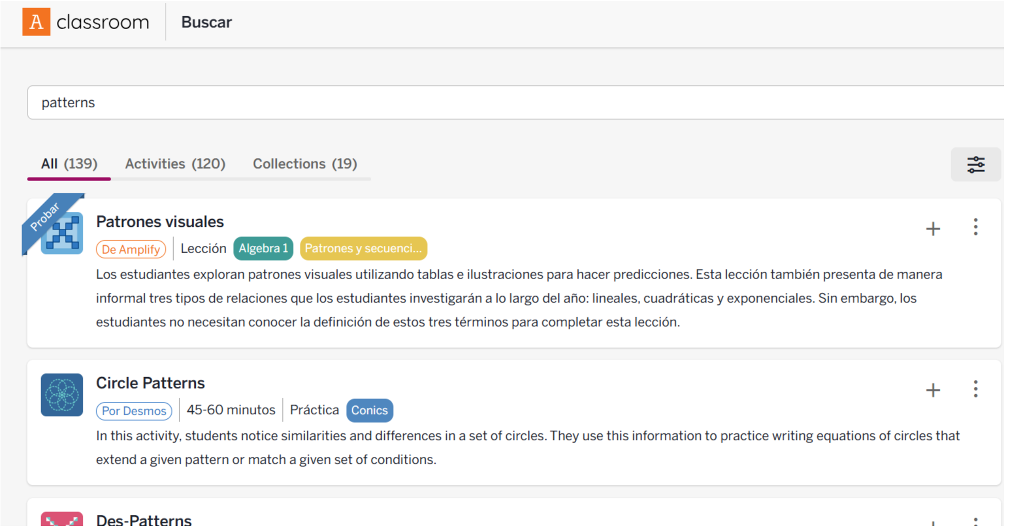
https://nrich.maths.org/algebra

https://classroom.amplify.com/discover?lang=es

https://www.visualpatterns.org/







Modelos concretos para las ecuaciones

Son intermediarios entre el lenguaje verbal y el algebraico para resolver ecuaciones.

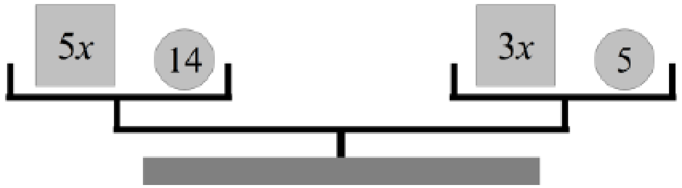
- **Modelo de balanza:**

Contextualizado en una situación de vida real

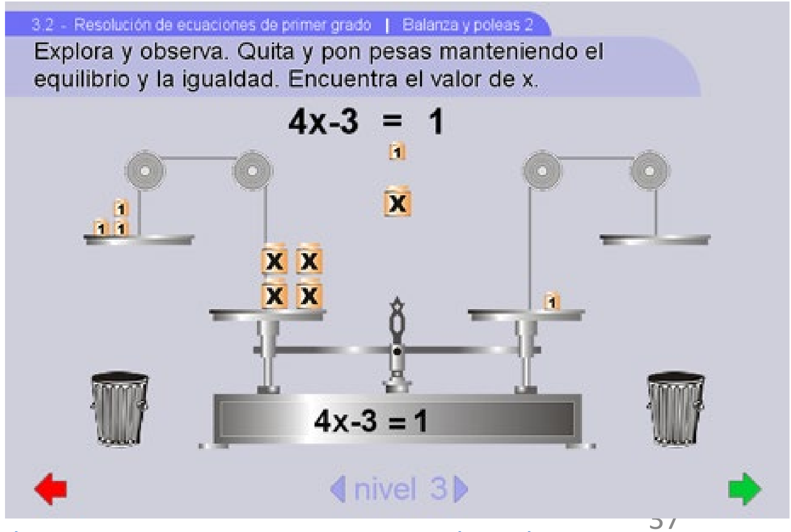
Enfatiza el carácter estructural de la ecuación y el igual como equivalencia

Emplear para ecuaciones de primer grado, inecuaciones y sistemas de ecuaciones.

En lo que se refiere a los métodos generales para la resolución de ecuaciones, uno de los modelos más válidos para introducirlo es el de la balanza.



$5x+14 = 3x+5$



Limitaciones: no hay encaje "natural" para los negativos (poleas y balanzas es poco intuitivo).

Fuente: https://arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/2_segundo/2_Matematicas/2m_b03_t02_s01_descartes/doc/info.html

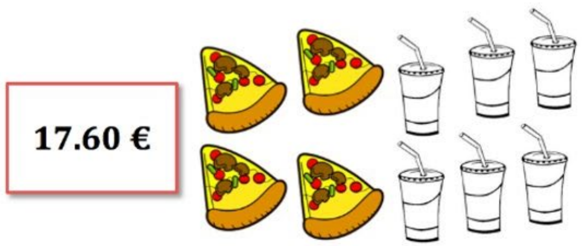
Modelos concretos para las ecuaciones

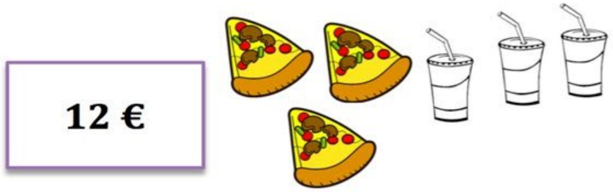
Son intermediarios entre el lenguaje verbal y el algebraico para resolver ecuaciones.

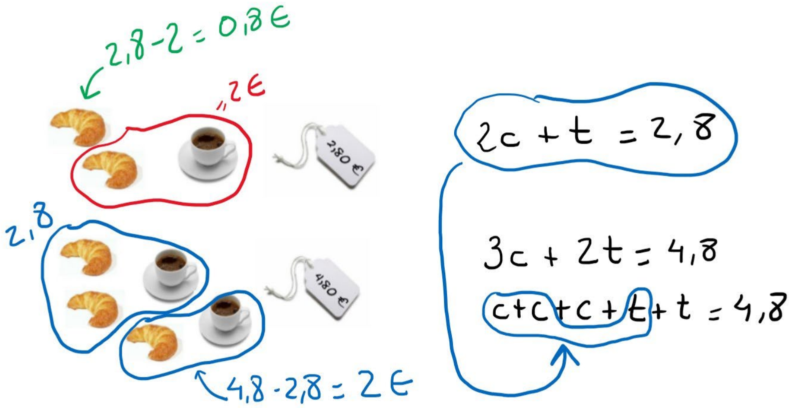
- **Modelo icónico**:

Para sistemas de ecuaciones, las representaciones de las incógnitas son dibujos que representan la situación y se opera sobre ellas.

Una secuencia de actividades en Beltrán-Pellicer (2021) y la propuesta completa en De la Fuente (2016).







Fuentes: De la Fuente (2016) y Beltrán-Pellicer (2021)

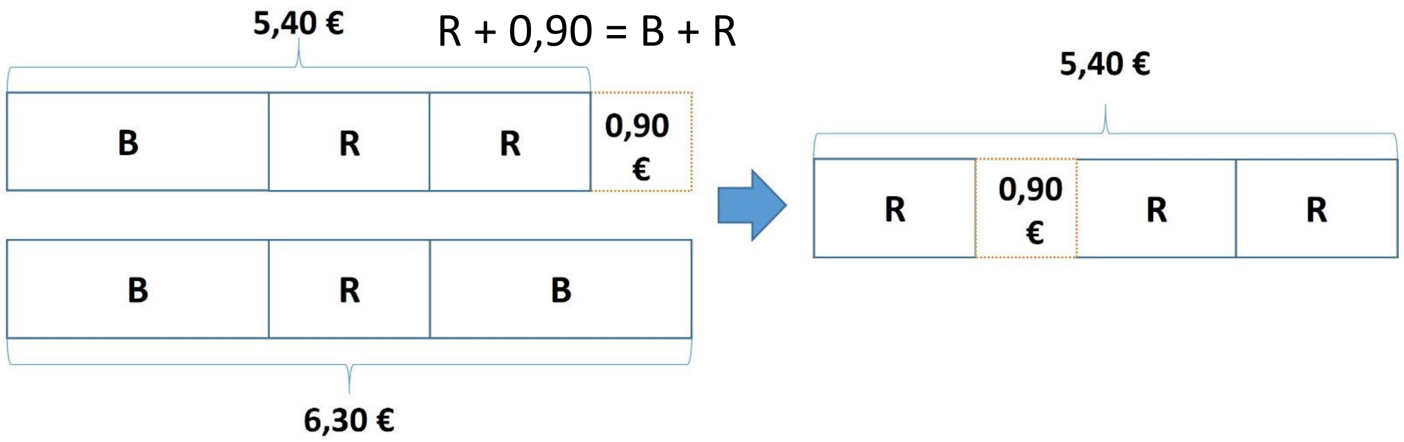
Modelos concretos para las ecuaciones

Son intermediarios entre el lenguaje verbal y el algebraico para resolver ecuaciones.

- **Modelo lineal**:

Para resolver ecuaciones de primer grado. Se parece al modelo icónico pero en este caso la igualdad entre expresiones se traduce en igualdad entre barras. La compensación permite resolver la ecuación, calculando la longitud del segmento incógnita.

Limitación: Al dibujar la incógnita, se presupone su longitud.



R + 0,90 + R + R = 5,40

Fuente: Arce et al. (2019)

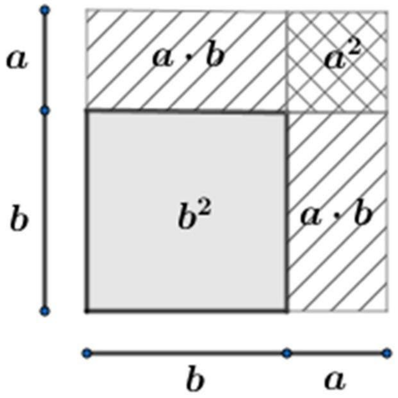
Modelos concretos para las ecuaciones

Son intermediarios entre el lenguaje verbal y el algebraico para resolver ecuaciones.

- **Modelo de área**:

Para visualizar identidades notables, resolver ecuaciones cuadráticas y contexto para introducir la multiplicación de expresiones algebraicas.

Limitación: Conocimientos previos geométricos.



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Fuente: Arce et al. (2019)

SECCIÓN 5. CÓMO MULTIPLICAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.a) Si tenemos baldosas cuadradas de 1 m de lado, ¿cuántas baldosas se necesitarán para llenar un rectángulo cuyos lados miden 4 y 6 m? Haz un dibujo y cuenta las baldosas.

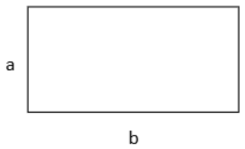
b) ¿Cómo podríamos saber cuántas baldosas se necesitan sin necesidad de hacer el dibujo?

c) ¿Cuál es la fórmula del área de un rectángulo de lados a y b? ¿Qué relación hay entre el área de un rectángulo y el número de baldosas cuadradas que caben en él?

d) Si ahora queremos rodear el rectángulo del apartado a) con una valla, ¿cuántos metros de valla tendremos que comprar?

e) ¿Cuál es la fórmula del perímetro de un rectángulo de lados a y b?

2.i) Como ya sabéis, la fórmula del área de un rectángulo es A = ba, donde b es la longitud de uno de los lados (base) y a la longitud del otro lado (altura).



Si nos dicen que a = 3 cm, ¿cómo expresaremos el área de ese rectángulo?

ii) Si ahora nos dicen que en ese rectángulo el lado b aumenta 2 cm, haz un dibujo del nuevo rectángulo. ¿Cuál será ahora la longitud de sus lados? ¿Cuánto habrá aumentado su área?

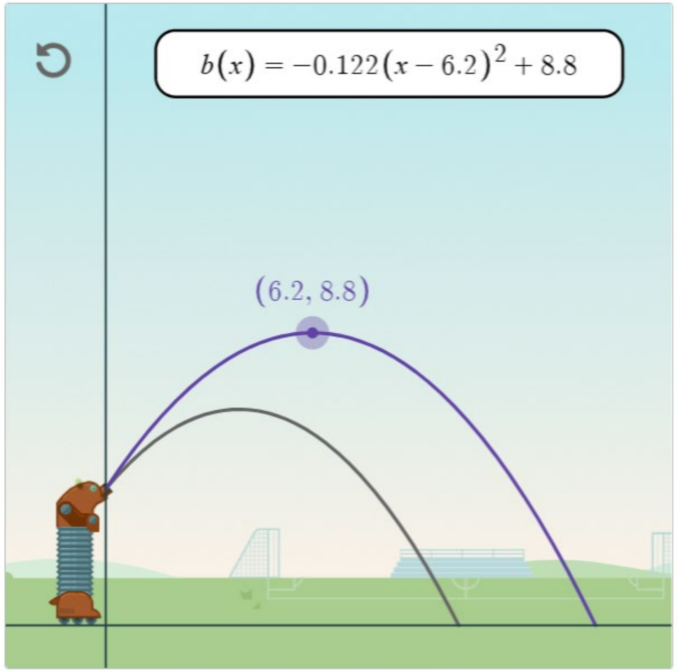
Fuente: Cid (2015)

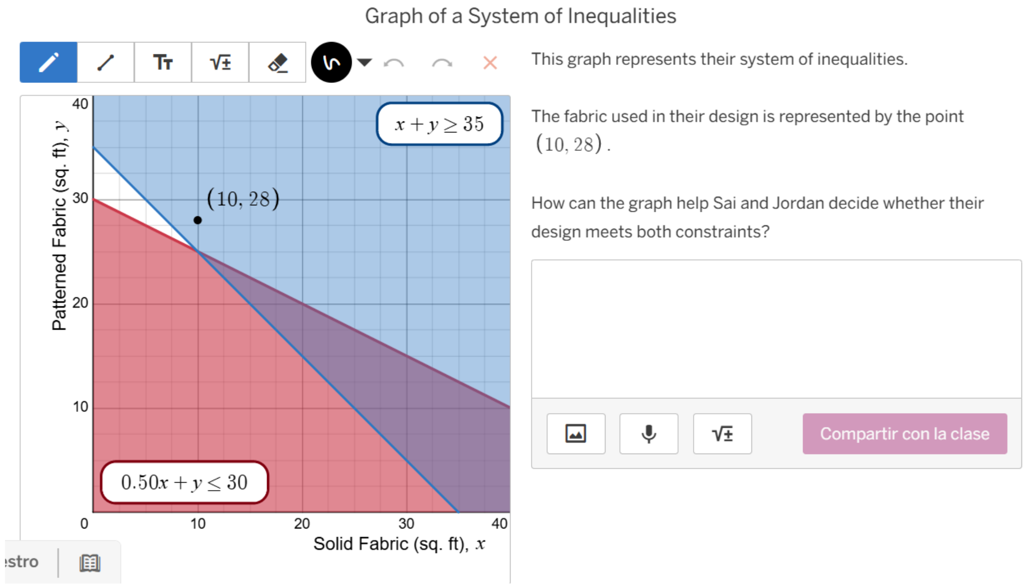
Modelos concretos para las ecuaciones

Son intermediarios entre el lenguaje verbal y el algebraico para resolver ecuaciones.

- **Gráficas**:

Relaciona la resolución de ecuaciones e inecuaciones con la geometría del plano y con las funciones.





Fuente: Amplify Desmos Math (https://classroom.amplify.com/discover?lang=es)

Funciones y sus distintas representaciones

La importancia del proceso de representación (Duval, 2006):

Comprender un concepto matemático consiste en

- *conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas,*
- *operar con las reglas internas de cada sistema de representación y*
- *convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades.*

(Castro y Castro, 1997)

Funciones y sus distintas representaciones

El álgebra permite una manera de representar distintos conceptos matemáticos a través de símbolos y es una herramienta para modelizar las situaciones de cambio entre dos magnitudes.

Por ejemplo, en el caso de las funciones:

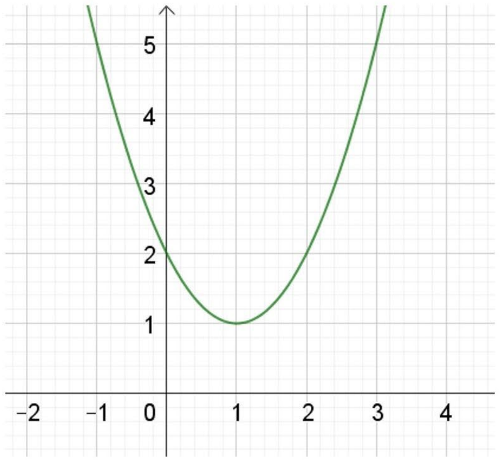
Función cuadrática

La imagen de un número es el cuadrado del número menos dos veces el número más dos unidades

$$f(x)=x^2-2x+2$$

$$f(x)=(x-1)^2+1$$

x	y
-1	5
0	2
1	1
2	2
3	5



Fuente: Arce et al. (2019)

Funciones y sus distintas representaciones

No es algo tan fácil

La construcción del *concepto* de función es un proceso largo y difícil para el alumnado. Involucra diferentes aspectos:

- Obtener o presentar información.
- Resaltar una tendencia en la evolución de una magnitud.
- Hacer predicciones a corto plazo.
- Analizar la existencia de una relación entre dos variables.

. . .

Se puede (debe) hacer una aproximación “informal” a las funciones en las primeras fases de obtención, interpretación y comunicación de información.

Funciones y sus distintas representaciones

Algunas ideas clave:

- La representación algebraica es introducida de manera prematura
- Hay poco trabajo de cambio entre distintas representaciones más allá de “Haz la grafica esta función f(x)=…”
- Articular las expresiones verbales y las gráficas en un primer acercamiento cualitativo.
- Las tablas como registro para un posterior acercamiento cuantitativo.
- La expresión algebraica para finalizar.

Funciones y sus distintas representaciones

Procesos de traducción

	Descripción verbal	Tablas	Gráficas	Expresiones algebraicas
Descripción verbal		Medida	Croquis	Modelo
Tablas	Lectura de relaciones numéricas		Dibujo	Ajuste numérico
Gráficas	Lectura de relaciones gráficas	Tabulación		Ajuste gráfico
Expresiones algebraicas	Lectura de relaciones simbólicas	Tabulación	Croquis	

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Londres: LEA. Publ.

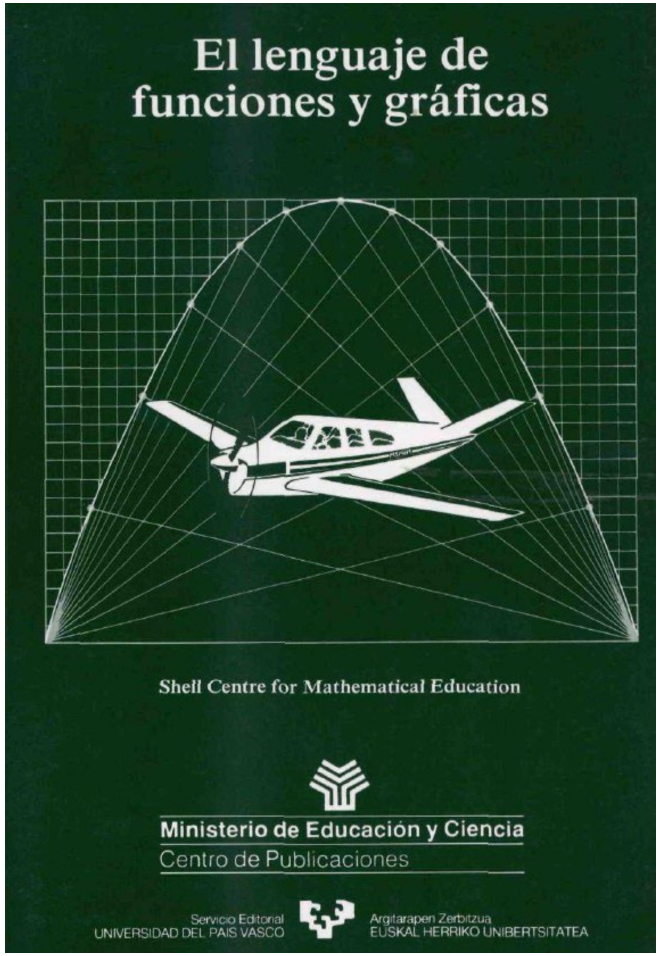
González-Astudillo, M. T. , Sierra, M., & Esteban-López, C. (1998). Funciones: traducción entre presentaciones. *Aula*, *10*, 89-104.

Representaciones gráficas y verbales

- Están presentes en muchas **situaciones cotidianas** en las que se intercambia información. Podemos usar en clase gráficas tomadas de Internet.
- El estudio de **gráficas reales** pone de manifiesto conceptos que en abstracto son difíciles de comprender.
- El enfoque **verbal y gráfico** es más asequible para los alumnos. Permite dedicarse a las ideas fundamentales (conceptos) y no simplemente al cálculo.
- Un tratamiento **cualitativo** centrado en las características globales de las gráficas.
- Un acercamiento **reflexivo y con significado** a los aspectos cuantitativos:
  - Representación de puntos.
  - Elección y efecto de la escala en los ejes.
  - Dibujo de curvas a partir de tablas de valores.
  - Etc.

Actividades y recursos: el libro del Shell Centre

El lenguaje de funciones y gráficas

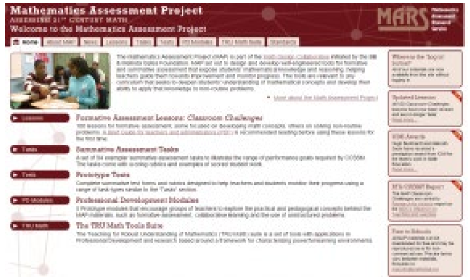


Estos materiales sirven para ayudar a los alumnos a desarrollar fluidez en la utilización del lenguaje matemático de gráficas, tablas y álgebra de cara a describir y analizar situaciones del mundo real.

https://www.libreria.educacion.gob.es/libro/el-lenguaje-de-funciones-y-graficas_144484/

Estructura del libro

- **Unidad A**: se aborda la interpretación y bosquejo de los gráficas. Se centra en el estudio cualitativo de las mismas basado en la interpretación de sus características globales.
- **Unidad B**: se descubren y exploran situaciones realistas, centrándose en la búsqueda de patrones y su expresión en forma verbal, gráfica y finalmente algebraica.
- Modelos de preguntas de examen.
- Una colección de problemas (problemas y gráficas y otros datos para interpretar).
- Materiales de apoyo. Sobre la forma de trabajar o **la evaluación**.



https://www.map.mathshell.org/

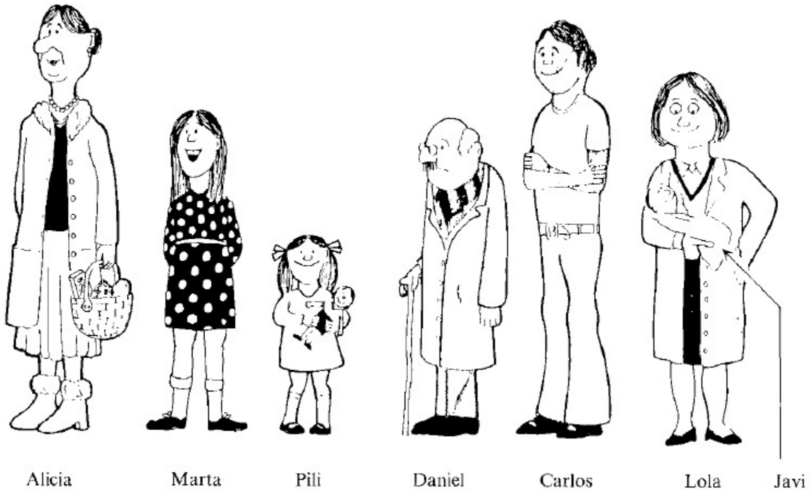
Unidades A y B

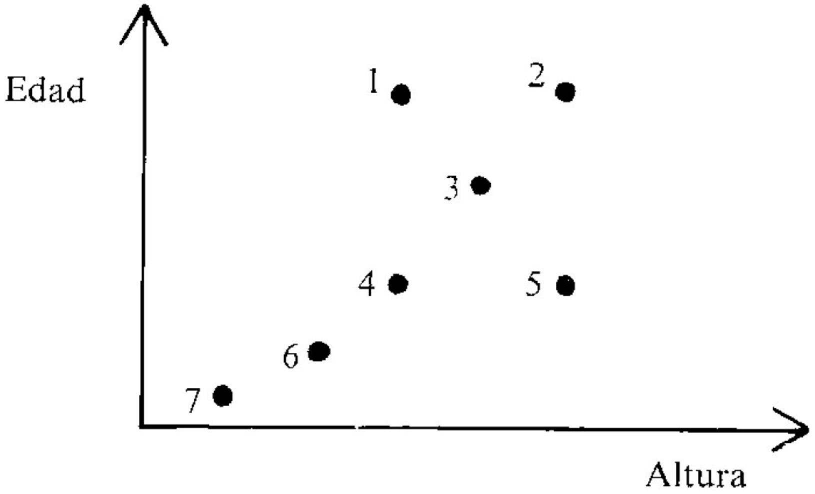
Lo de los niveles es muy, pero que muy orientativo.

	Nivel propuesto
A1. Interpretación de puntos.	5º y 6º EP y 1º ESO
A2. ¿Son las gráficas solamente dibujos?	6º EP y 1º ESO
A3. Dibujo de gráficas a partir de textos.	1º-2º ESO
A4. Diseño de gráficas a partir de dibujos.	1º-2º ESO
A5. Mirando gradientes.	3º ESO
	Nivel propuesto
B1. Realización de gráficas a partir de tablas.	2º ESO
B2. Descubriendo funciones en situaciones.	2º-3º ESO
B3. Funciones exponenciales.	4º ESO
B4. Una función de varias variables.	4º ESO

Interpretación de puntos

¿Quién está representado por cada punto del diagrama?

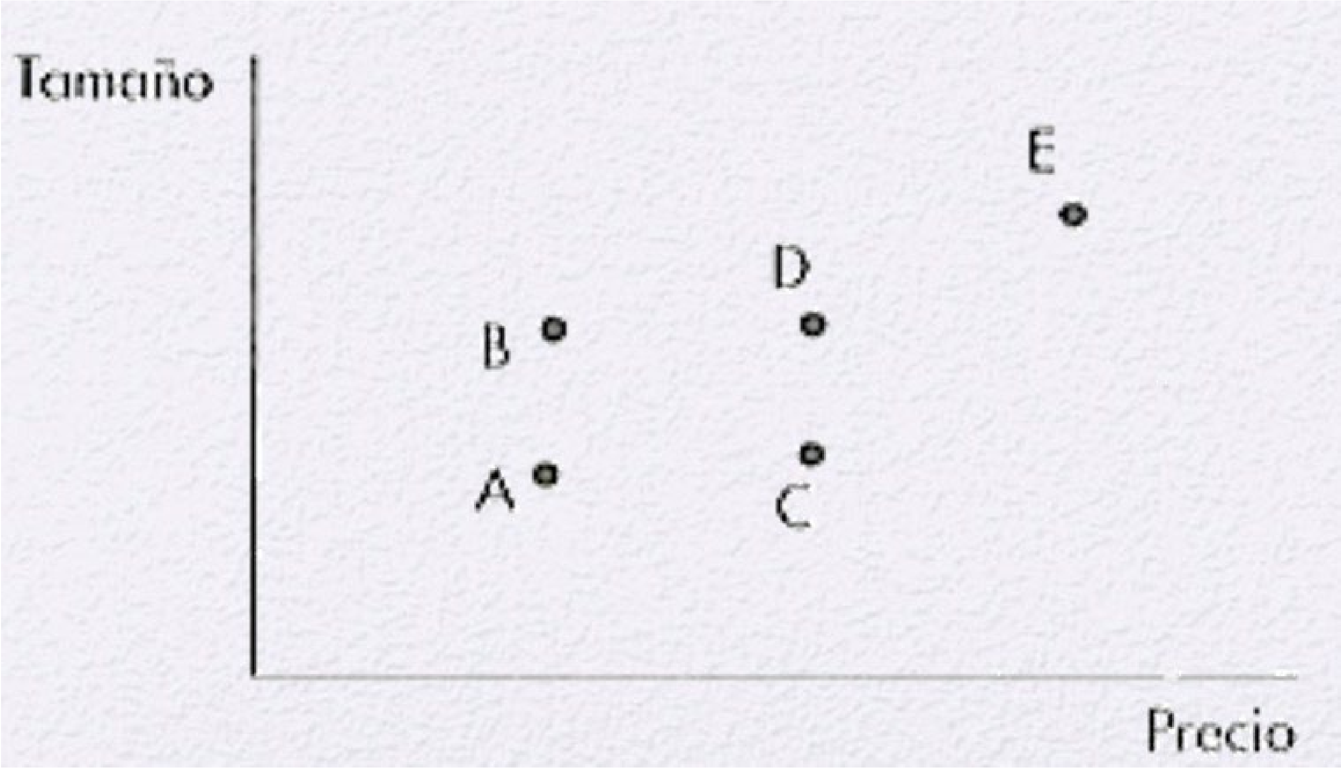




Interpretación de puntos

En el escaparate de una papelería hay cinco cajas de rotuladores, A, B, C, D y E de varios tamaños (12, 24 y 36 rotuladores) y precios (2 euros, 4 euros y 6 euros). La gráfica describe las características de las cajas:

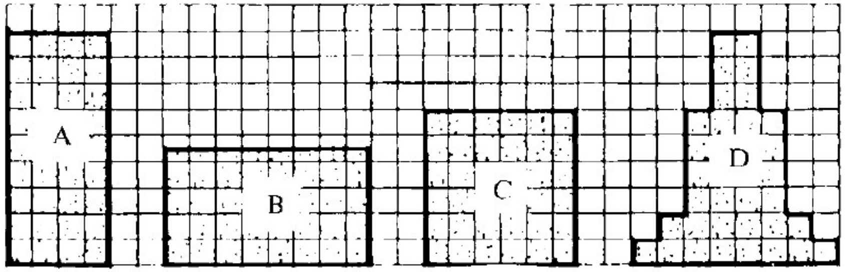
- ¿Qué caja sale a mejor precio?
- ¿Qué caja sale a peor precio?

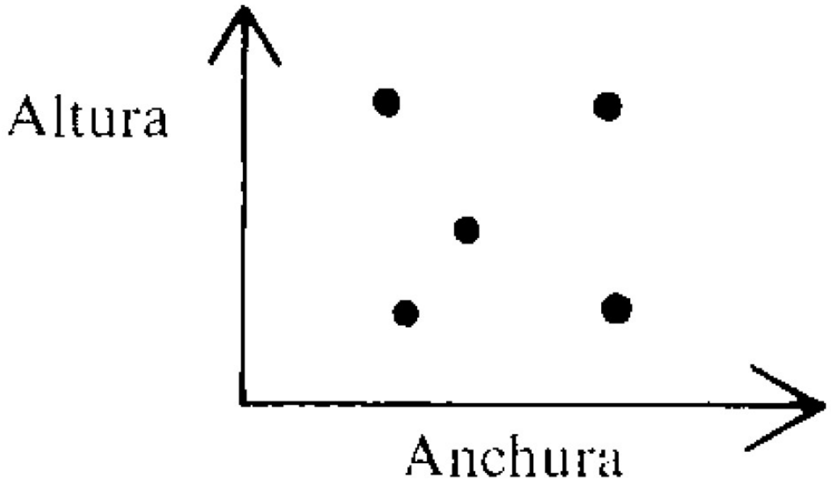


Interpretación de puntos

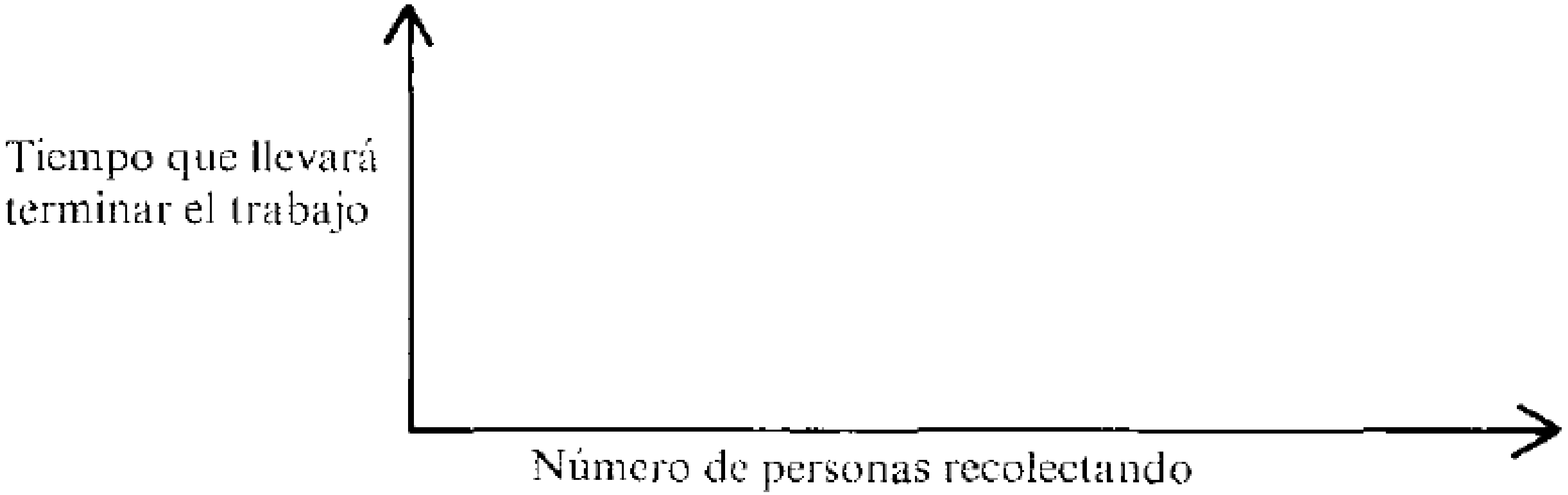
Cada una de estas cuatro figuras tiene un área de 36 unidades cuadradas.

- Marca 4 puntos en el gráfico inferior con las letras A, B, C y D.
- ¿Puedes dibujar una quinta figura de 36 unidades cuadradas que corresponda al 5." punto? Explícalo.
- Dibuja un diagrama que represente a todos los rectángulos con un área de 36 unidades cuadradas.
- ¿Qué sucede si incluyes en tu gráfica todas las figuras con el mismo área?


A
B
C
D


Altura
Anchura

Gráficas a partir de textos


Tiempo que llevará terminar el trabajo
Número de personas recolectando

Gráficas a partir de textos

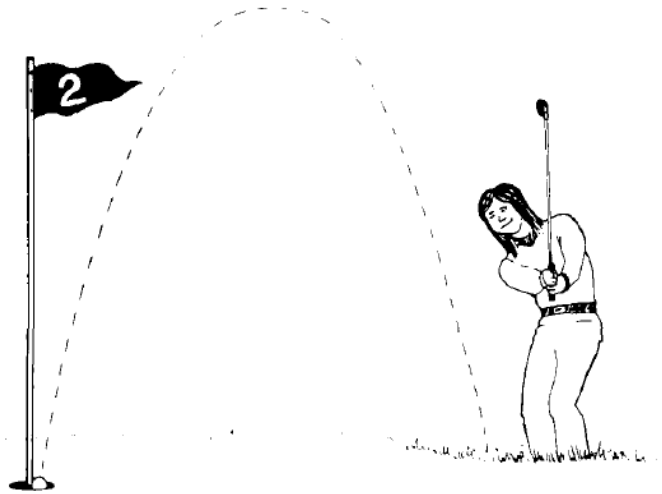
Compara tu gráfica con las de tus compañeros. Intenta llegar a un acuerdo sobre la versión correcta. Escribe cómo has llegado a tu respuesta.

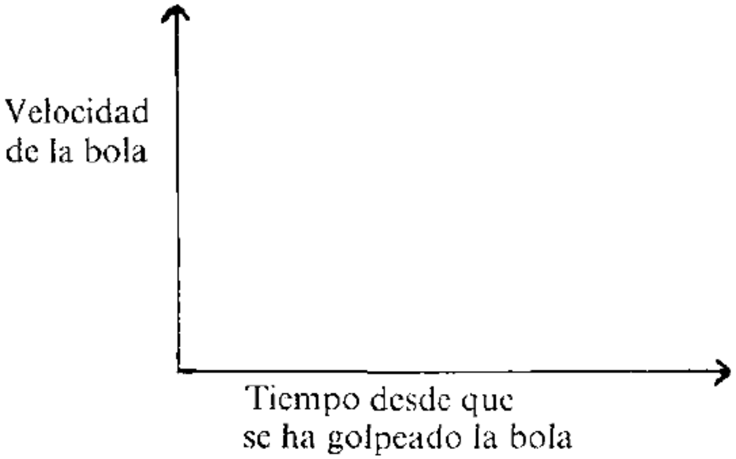
- ¿Debería ir la gráfica «hacia arriba» o «hacia abajo»? ¿Por qué?
- ¿Debería ser la gráfica una línea recta? ¿Por qué?
- ¿La gráfica debería cortar los ejes? Si es así, ¿dónde? Si no, ¿por qué no?

¿Son las gráficas solamente dibujos?

¿Cómo cambia la velocidad de la bola cuando va por el aire en este golpe de golf?

- Discute esta situación con tu compañero y escribe una descripción clara, indicando cómo creéis que varía la velocidad de la bola.
- Ahora haz una gráfica aproximada para ilustrar tu descripción:

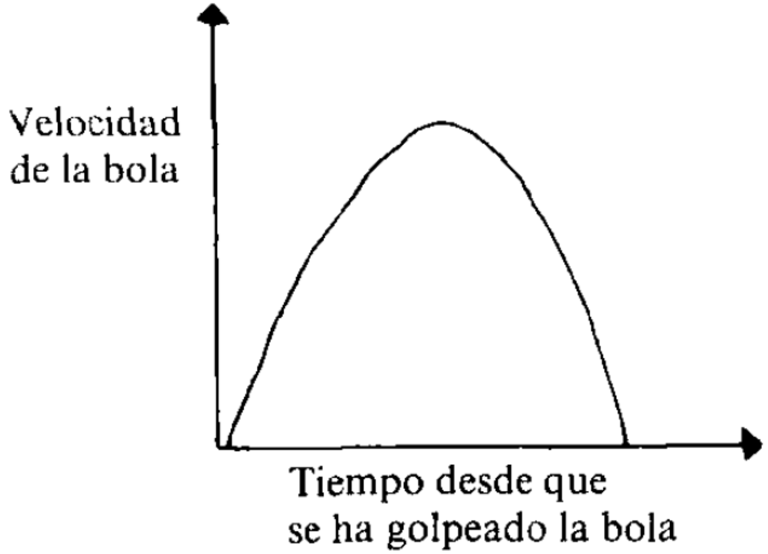



Velocidad
de la bola
Tiempo desde que
se ha golpeado la bola

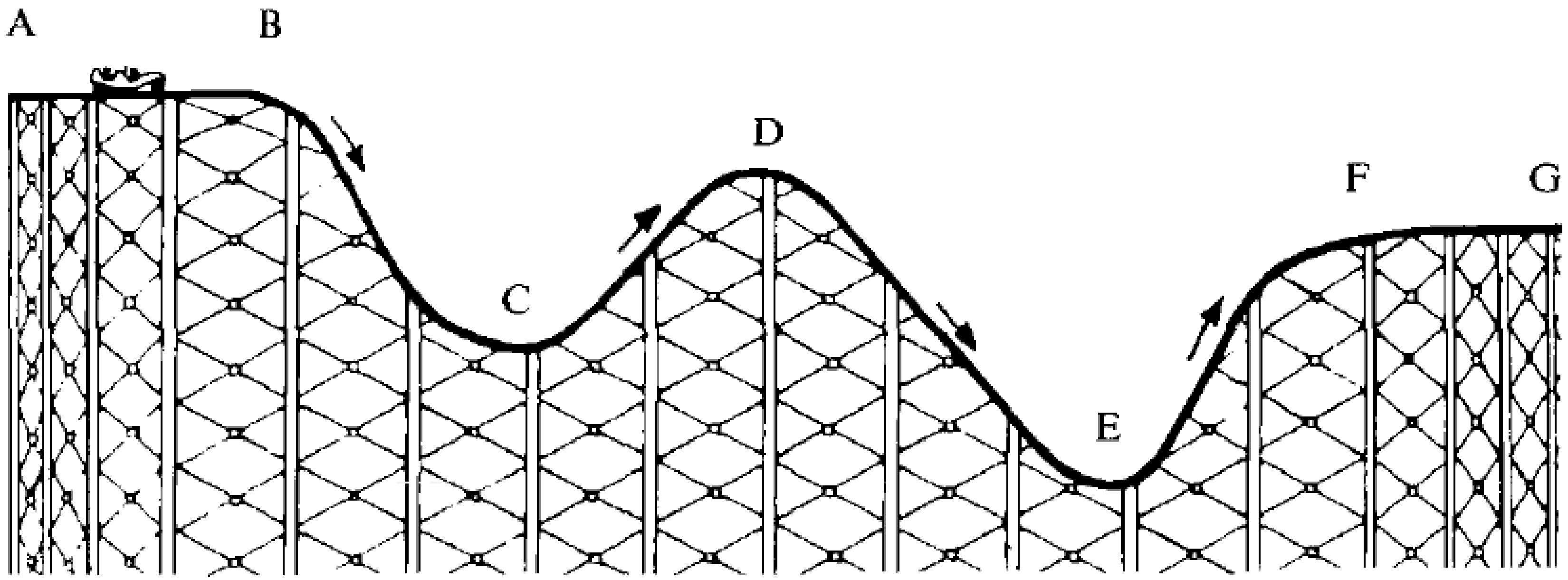
Gráficas a partir de dibujos

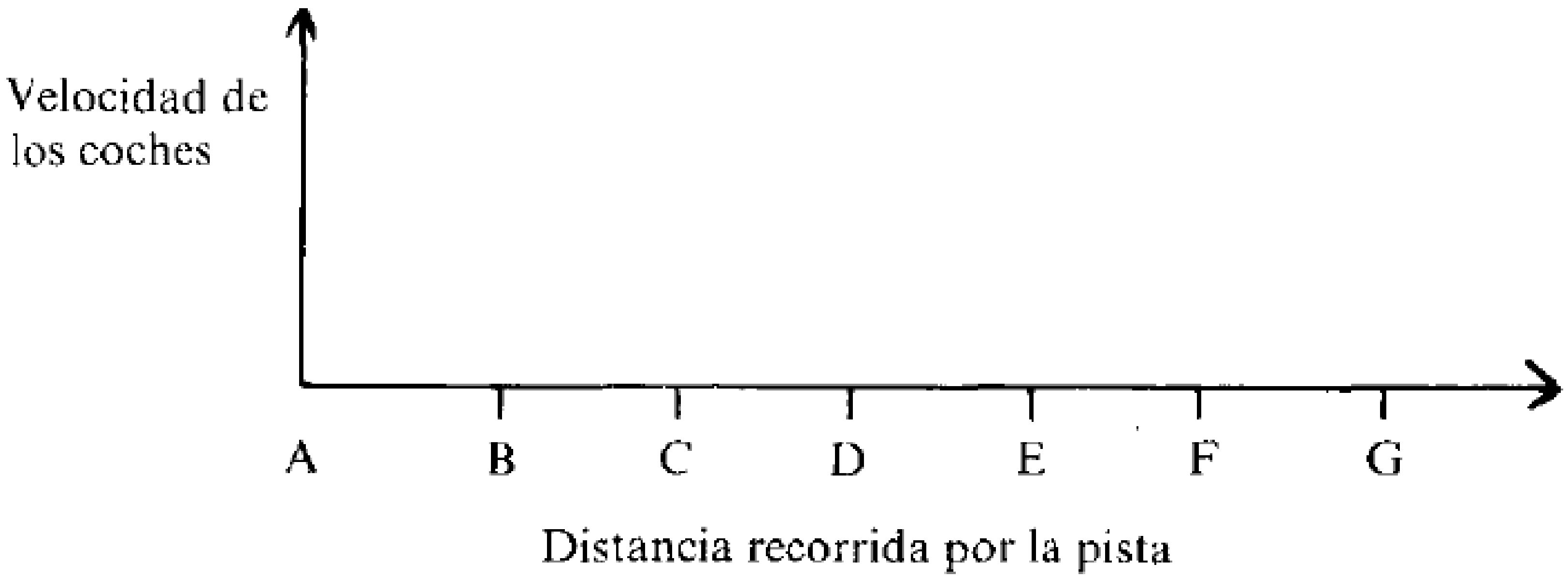
Pedro intentó resolver la cuestión del golf y dibujó una gráfica como esta:

- Coméntalo.
- ¿Puedes sugerir por qué hizo la gráfica así?
- ¿Ves alguna relación entre el intento de Pedro y el dibujo?



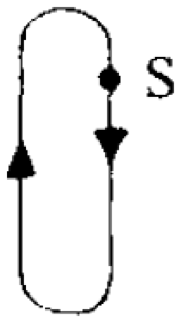
Gráficas a partir de dibujos



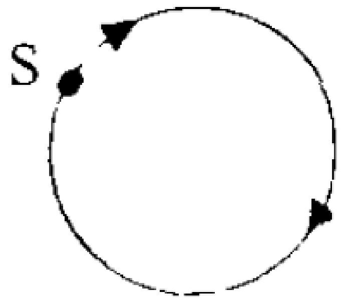

Velocidad de los coches
A
B
C
D
E
F
G
Distancia recorrida por la pista

Gráficas a partir de dibujos

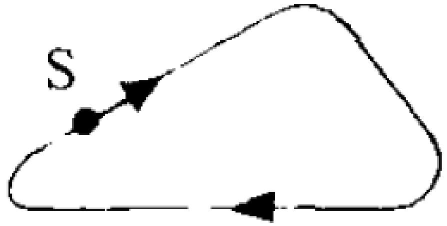
¿Cómo crees que varía la velocidad de un coche cuando está dando la segunda vuelta en cada uno de los tres circuitos dibujados abajo? (S = punto de salida).



Circuito 1



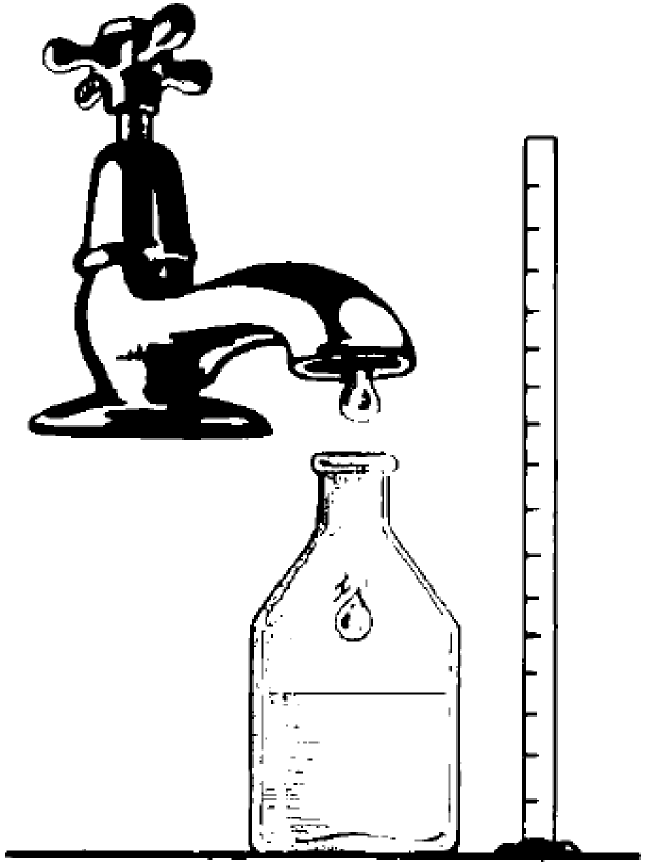
Circuito 2



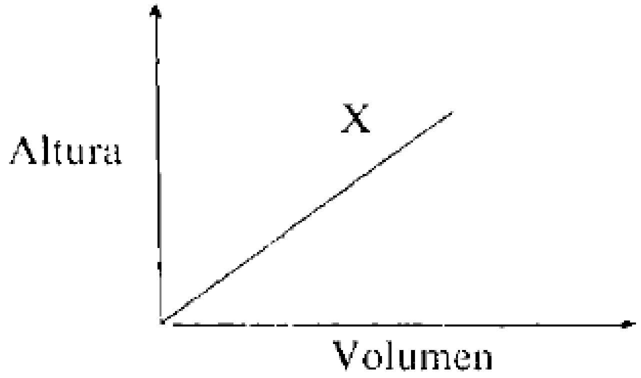
Circuito 3

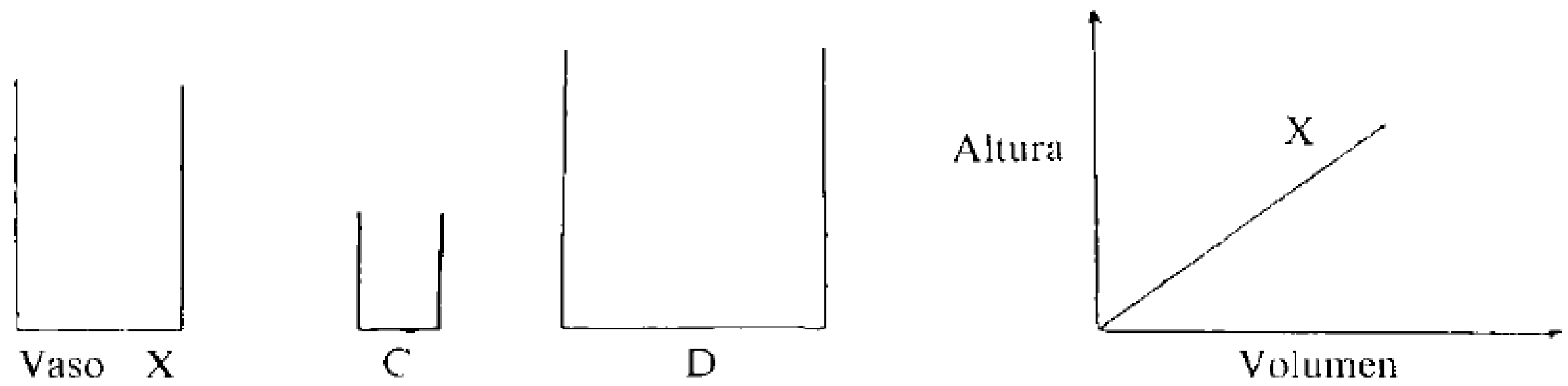

Velocidad
Distancia recorrida

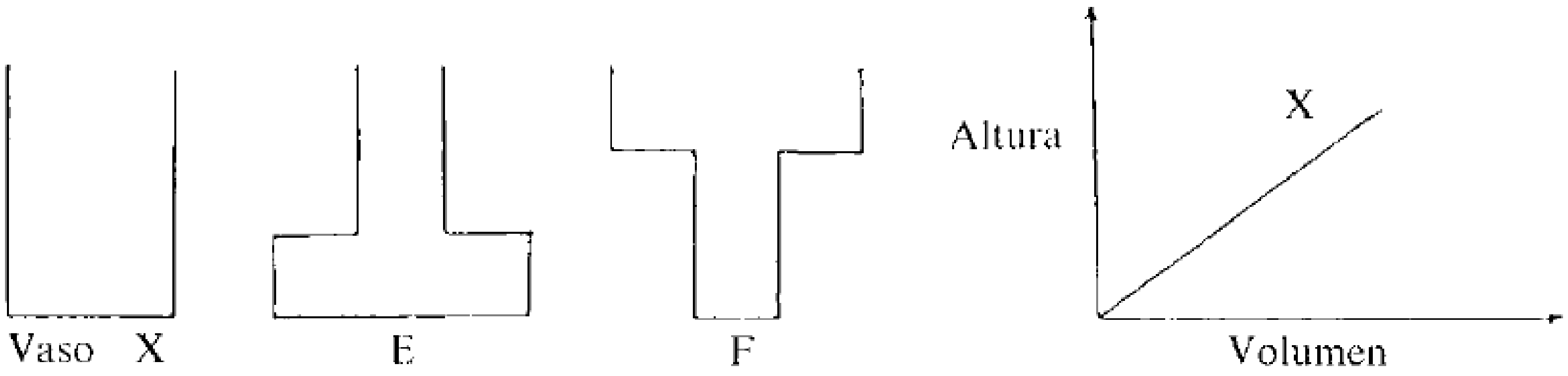
Gradientes

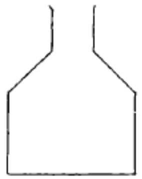



Vaso X
A
B

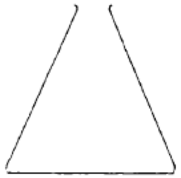

Altura
X
Volumen


Vaso X
C
D
Altura
X
Volumen

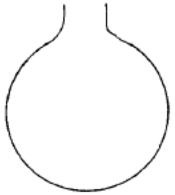

Vaso X
E
F
Altura
X
Volumen



Frasco de tinta

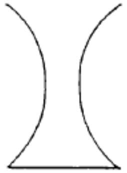


Frasco cónico

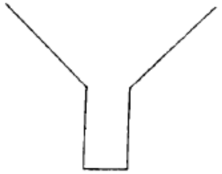


Frasco de evaporación

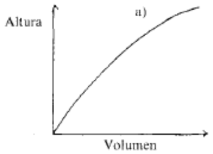
Cubo

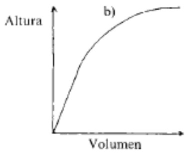


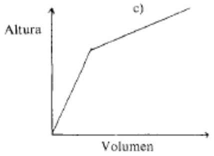
Vaso

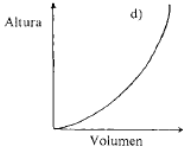


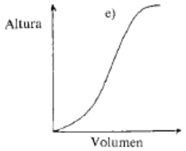
Embudo taponado

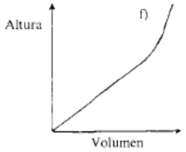


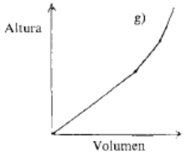


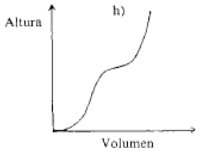


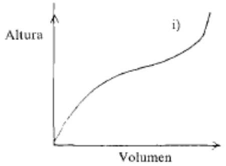








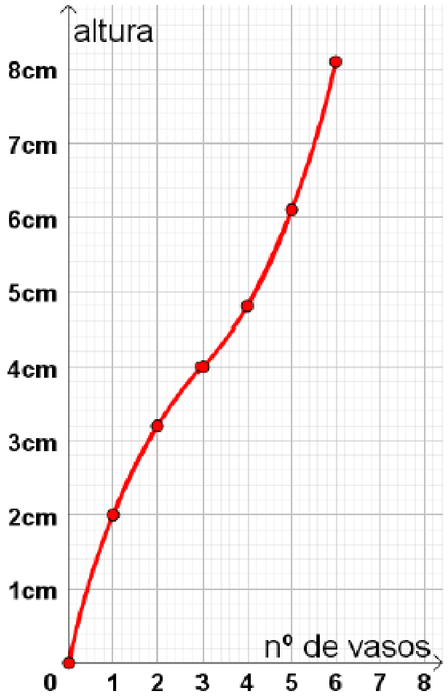




Ejemplo de situación de aprendizaje [3]: Jarrones y funciones

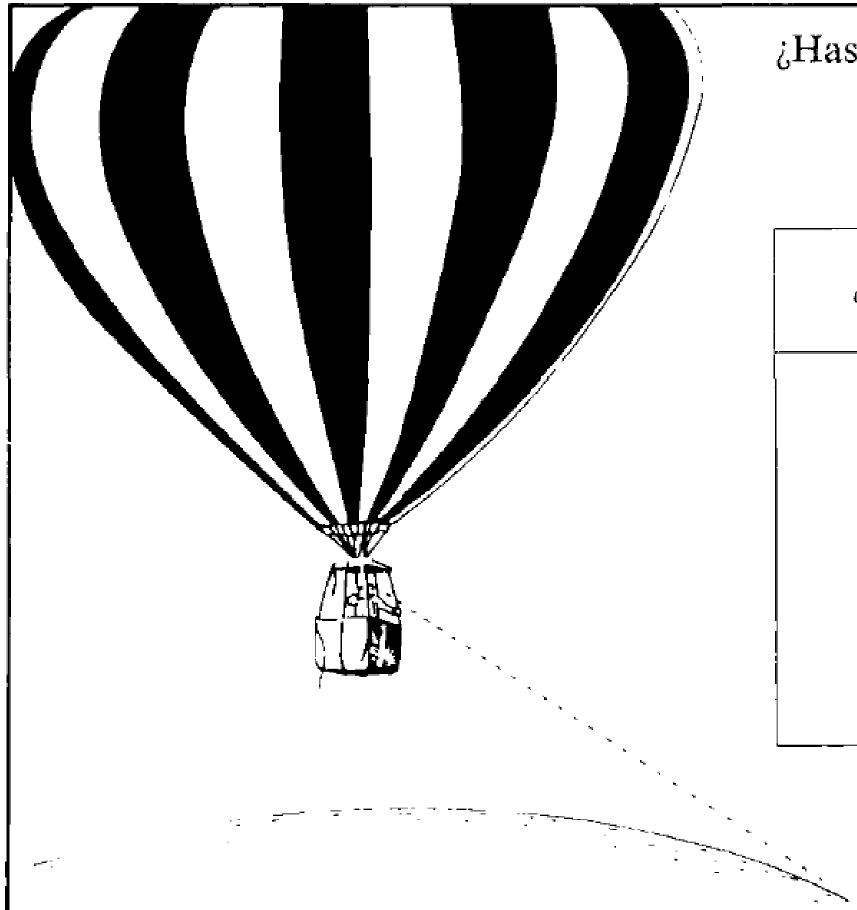
Mismo enfoque, pero en este caso, se busca la relación cuantitativa

Nº vasos	Altura alcanzada (cm)
0	0
1	2
2	3.2
3	4
4	4.8
5	6.1
6	8.1



Gráficas a partir de tablas

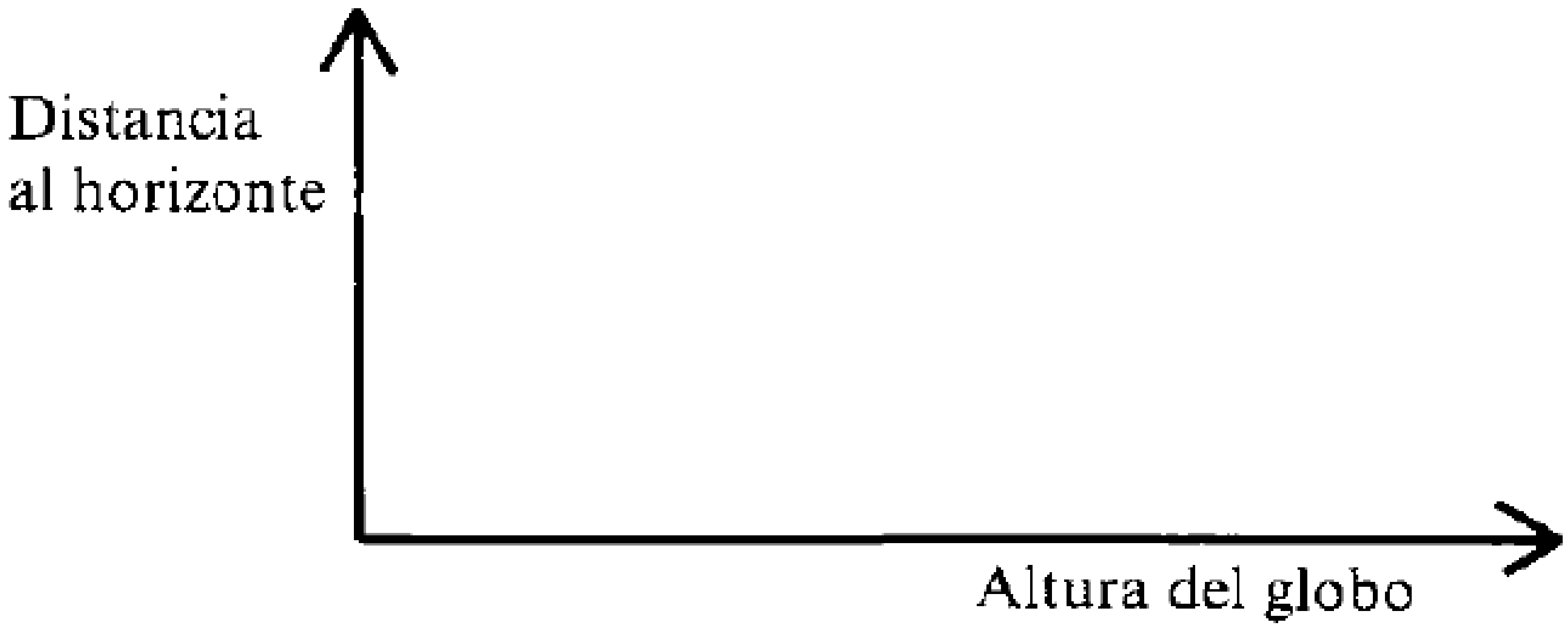
Sin marcar los puntos exactamente, intenta realizar una gráfica aproximada que describa la relación entre la altura del globo y la distancia al horizonte.



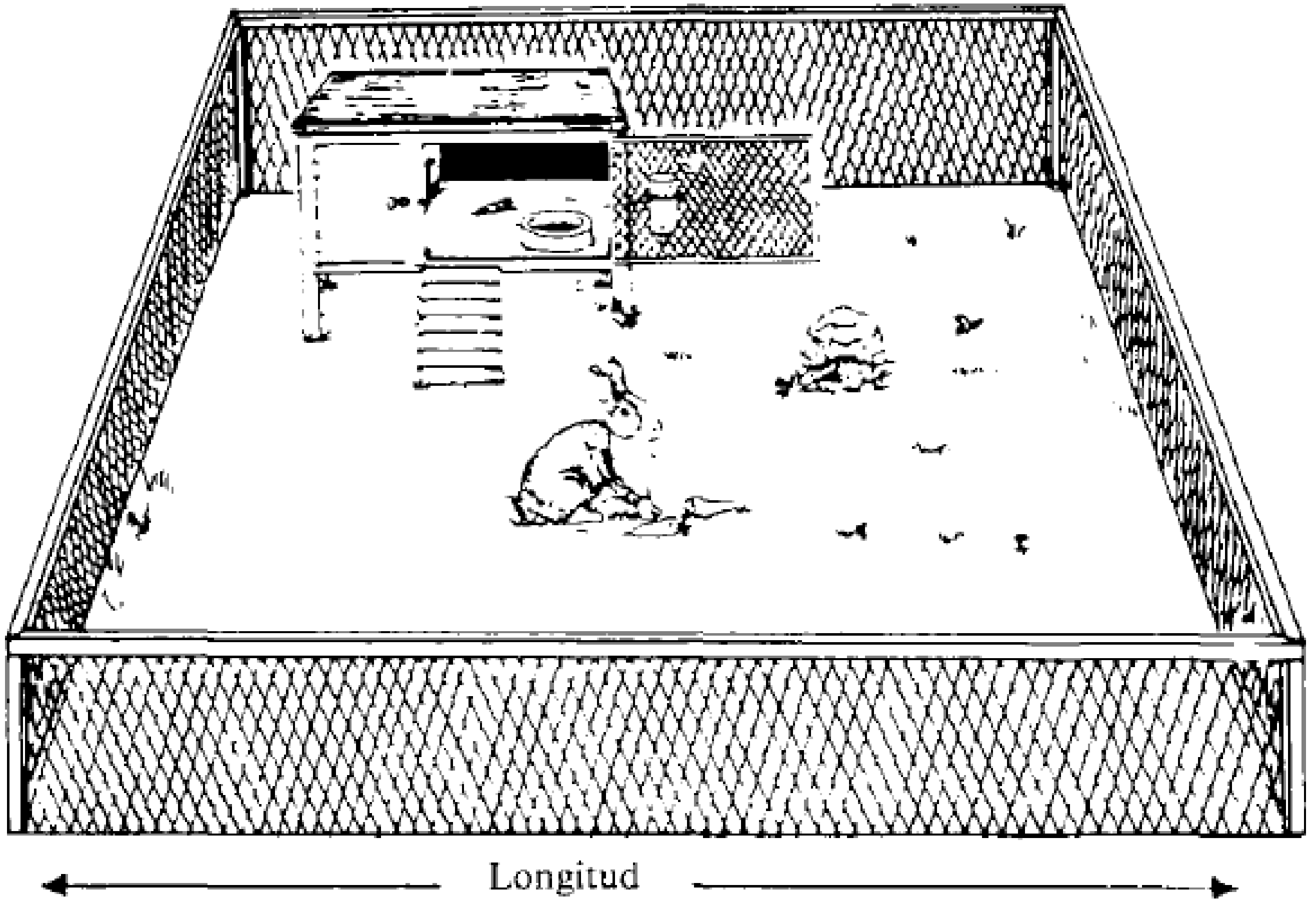
¿Hasta dónde puedes ver?

Altura del globo (m)	Distancia hasta el horizonte (km)
5	8
10	11
20	16
30	20
40	23
50	25
100	33
500	80
1.000	112

Gráficas a partir de tablas



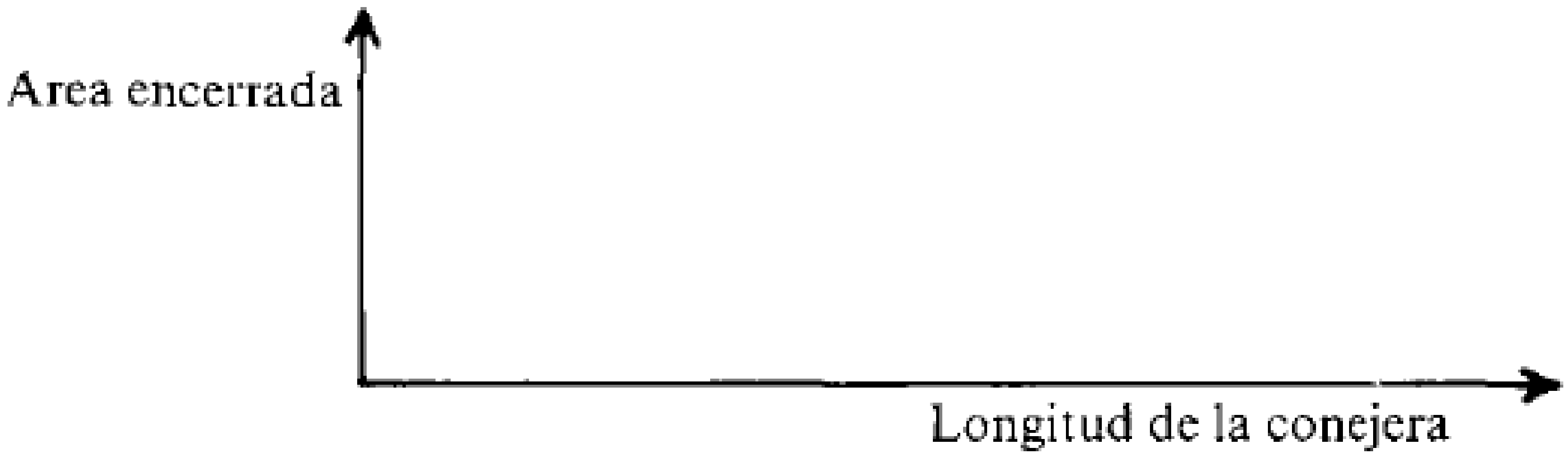
Funciones en situaciones



Funciones en situaciones

Hay que construir una conejera rectangular con 22 metros de valla metálica. El dueño está interesado en saber cómo depende el área cercada por la valla de la longitud de la conejera. Piensa detenidamente sobre esta situación y discútela con tu compañero.

- Describe, por escrito, cómo cambiará el área al aumentar la longitud, tomando todos los valores posibles.
- Ilustra tu respuesta con una gráfica:

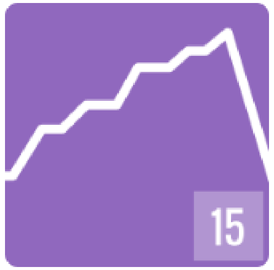


Area encerrada
Longitud de la conejera

- Para ver si tu gráfica es correcta, construye una tabla de valores.
- ¿Observas alguna regla en esta tabla? Escribe en qué consiste y trata de explicar por qué ocurre eso.
- Ahora, repite tu gráfica utilizando las reglas que has encontrado (No es necesario hacerla con exactitud).
- Utilizando tu gráfica y tu tabla de valores, calcula cuáles deberían ser las dimensiones del recinto para obtener el mayor espacio posible para que se pueda mover el conejo.
- Finalmente, intenta hallar una fórmula algebraica que se ajuste a esta situación.

Actividades y recursos:
Amplify your classroom (Desmos)

Actividades y recursos:
Amplify your classroom (Desmos)



Graficar historias

Por Desmos | 60+ minutos | Introducción Functions

Móvil Tableta Laptop

Esta actividad ayudará a los estudiantes a pasar de representaciones de una variable (p. ej., rectas numéricas) a representaciones de DOS variables en un plano de coordenadas. Los estudiantes verán videos de 15 segundos y los convertirán en gráficos con su ayuda.

Marbleslides: Rectas

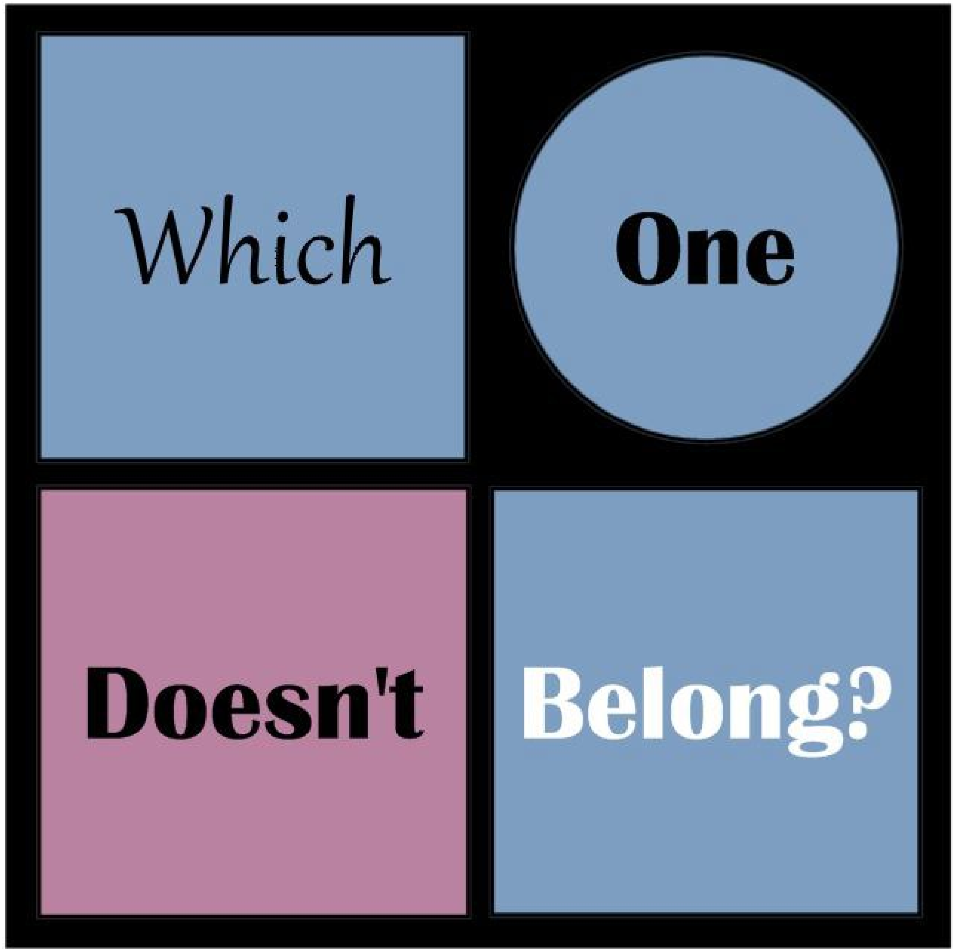
Por Desmos | 45-60 minutos | Desarrollo

Móvil Tableta Laptop

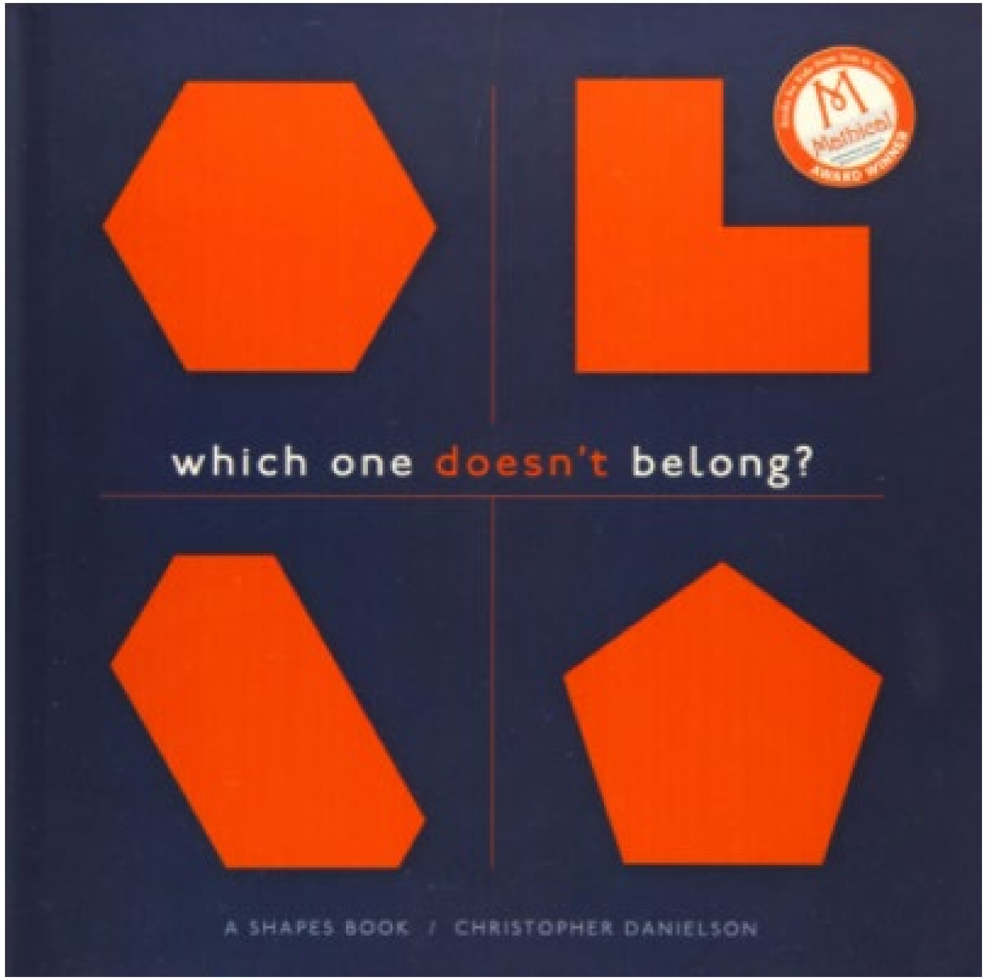
En esta actividad encantadora y desafiante, los estudiantes transformarán líneas para que las canicas pasen por las estrellas. Los estudiantes pondrán a prueba sus ideas lanzando las canicas y tendrán la oportunidad de revisar antes de intentar el próximo desafío.

Traducido por el equipo de localización de Desmos.

Actividades y recursos: WODB

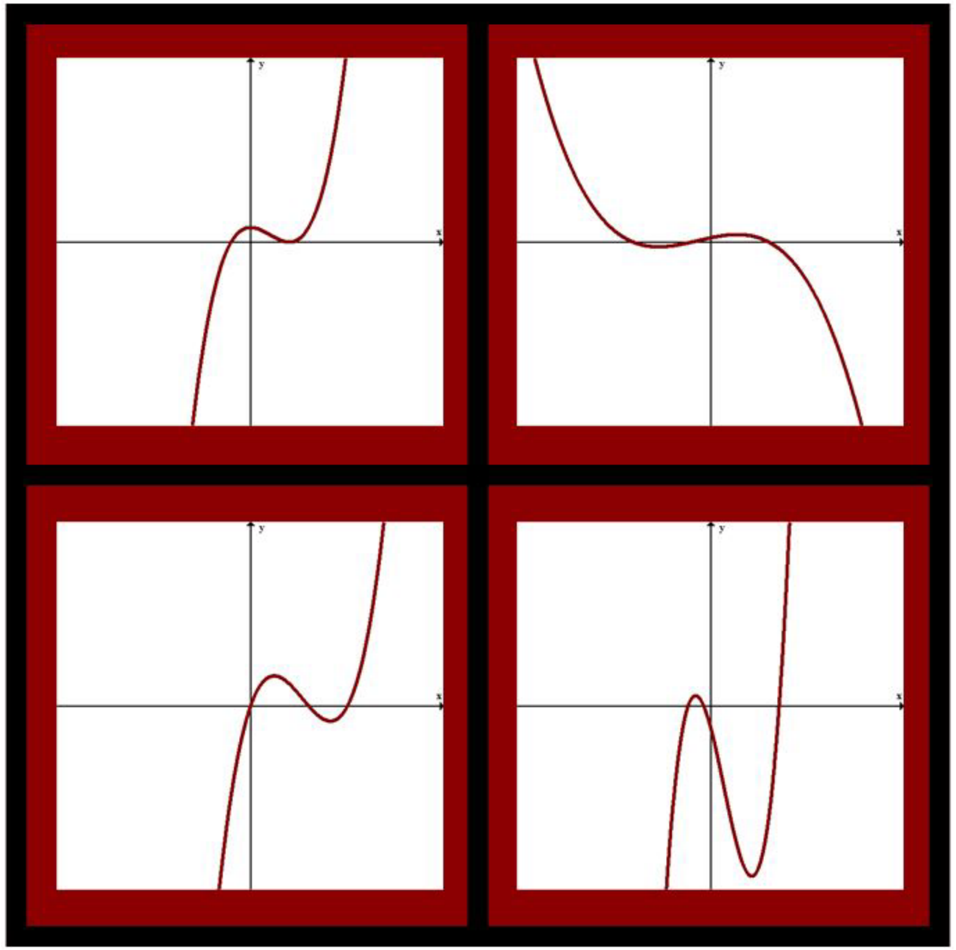


www.wodb.ca



Danielson, C. (2016). *Which One Doesn't Belong? A Shapes Book*. Stenhouse Publishers.

Ejemplo de WODB de funciones



Sesión “Sentido algebraico”

Elementos de didáctica del sentido algebraico:

- La transición entre aritmética y álgebra: rupturas entre quehaceres y diferentes significados de los signos.
- Distintas visiones del álgebra escolar.
- El proceso de generalización.
- Modelos de enseñanza de ecuaciones.
- Funciones y sus distintas representaciones.

Los procesos matemáticos en el sentido algebraico.

El sentido algebraico en el currículo aragonés.

Materiales y recursos para trabajar el sentido algebraico.

Bibliografía para profundizar en la didáctica del sentido algebraico.

El sentido algebraico en el currículo aragonés (LOMLOE)

Sentido presente en toda la etapa de Ed. Primaria y Ed. Secundaria

Es una “novedad” en Ed. Primaria:

D.1. Patrones, relaciones, clasificaciones y funciones

D.2. Modelo matemático

D.3. Pensamiento computacional

“Al hablar de álgebra en educación primaria no se quiere decir que haya que adelantar lo que se ha hecho siempre en el álgebra de secundaria a la etapa de primaria […] Tampoco… privilegiar el álgebra, como aspiración única de la matemática escolar, frente a la aritmética…”

D.1. Patrones, relaciones, clasificaciones y funciones:

- Identificación, descripción verbal, representación y predicción razonada de términos a partir de las **regularidades** en una colección de números, figuras o imágenes.
- **Clasificaciones** de objetos atendiendo a cualidades determinadas y diferentes criterios, incluso de forma combinada.
- Relaciones de **igualdad y desigualdad** y uso de los signos = y ≠ entre expresiones que incluyan operaciones y sus propiedades.
- La **igualdad** como expresión de una **relación de equivalencia** entre dos elementos y obtención de datos sencillos desconocidos (representados por medio de un símbolo) en cualquiera de los dos elementos.
- Representación de la **relación “mayor que” y “menor que”**, y uso de los signos < y >.
- Apreciación del **cambio** en distintos tipos de situaciones, tanto numéricas como geométricas.

D.1. Patrones, relaciones, clasificaciones y funciones:

- Estrategias de identificación, representación (verbal, tablas, gráficos y notaciones inventadas) y predicción razonada de términos a partir de las **regularidades** en una colección de números, figuras o imágenes.
- Creación de **patrones recurrentes** a partir de regularidades o de otros patrones utilizando números, figuras o imágenes.
- **Clasificaciones** de objetos atendiendo a cualidades determinadas y diferentes criterios.
- Relaciones de **igualdad y desigualdad** y uso de los signos < y >. Determinación de datos desconocidos (representados por medio de una letra o un símbolo) en expresiones sencillas relacionadas mediante estos signos y los signos = y ≠.
- Apreciación del **cambio** en distintos tipos de situaciones, tanto numéricas como geométricas.

D.2. Modelo matemático:

- Proceso de modelización con el andamiaje adecuado en el aula, empleando objetos manipulables, dramatizaciones, dibujos, diagramas, etc. de manera que se conecte lo concreto con lo pictórico y lo abstracto para comprender las situaciones y los problemas que se planteen.

- Vinculado a la resolución de problemas con andamiaje.
- De lo concreto a lo abstracto.
- El papel de los manipulativos, y representaciones gráficas como dibujos, esquemas.
- Comenzar con "rutinas" abiertas; ¿qué observo? ¿qué puedo saber? ¿qué me gustaría/necesitaría saber?
- Se desaconseja empleo de métodos que *cortocircuitan* el proceso de modelización (palabras clave, Datos-Operación-Solución).

En Educación Secundaria:

D.1. Patrones

D.2. Modelo matemático

D.3. Variable

D.4. Igualdad y desigualdad

D.5. Relaciones y funciones

D.6. Pensamiento computacional

"Los siguientes cuatro aspectos […] abarcan varios componentes del álgebra en educación secundaria:

1. Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas.

2. Resolución de problemas

3. Situaciones funcionales

4. Modelización de fenómenos físicos y matemáticos."

D.1. Patrones:

- Patrones, pautas y regularidades: observación y determinación de la **regla de formación** en casos sencillos.

D.2. Modelo matemático:

- Modelización de situaciones de la vida cotidiana **usando representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico**.
- Estrategias de deducción de **conclusiones** razonables a partir de un modelo matemático.

D.3. Variable:

- Variable: comprensión del concepto en sus **diferentes naturalezas**.

D.4. Igualdad y desigualdad:

- **Relaciones lineales** en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica.
- Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas basados en **relaciones lineales**.
- Estrategias de búsqueda de soluciones en **ecuaciones** en situaciones de la vida cotidiana.
- Ecuaciones: resolución mediante el uso de la **tecnología**.

D.5. Relaciones y funciones:

- Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clase de **funciones** que las modelizan.
- Relaciones lineales: identificación y comparación de **diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas**, y sus propiedades a partir de ellas.
- Estrategias de **deducción de la información relevante** de una función mediante el uso de **diferentes representaciones simbólicas**.

En 2º ESO se añaden relaciones cuadráticas

Sesión “Sentido algebraico”

Elementos de didáctica del sentido algebraico:

- La transición entre aritmética y álgebra: rupturas entre quehaceres y diferentes significados de los signos.
- Distintas visiones del álgebra escolar.
- El proceso de generalización.
- Modelos de enseñanza de ecuaciones.
- Funciones y sus distintas representaciones.

Los procesos matemáticos en el sentido algebraico.

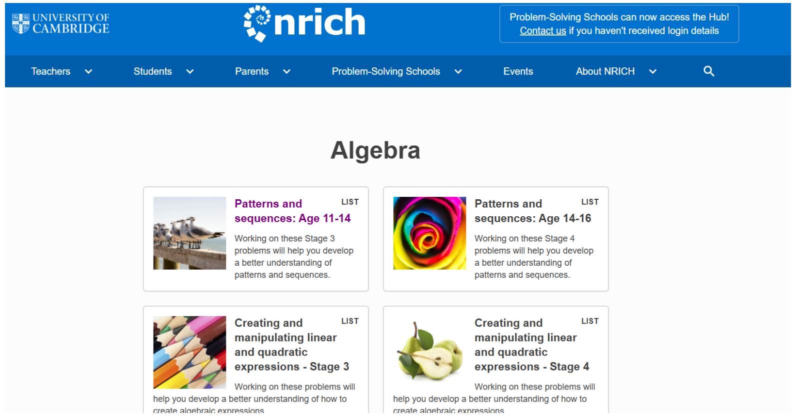
El sentido algebraico en el currículo aragonés.

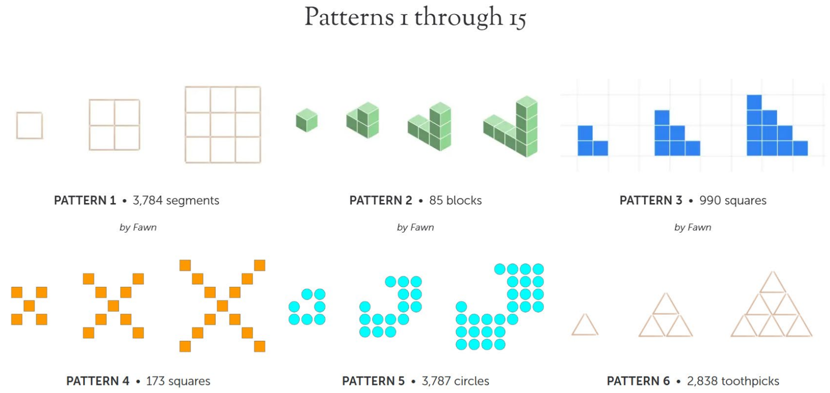
Materiales y recursos para trabajar el sentido algebraico.

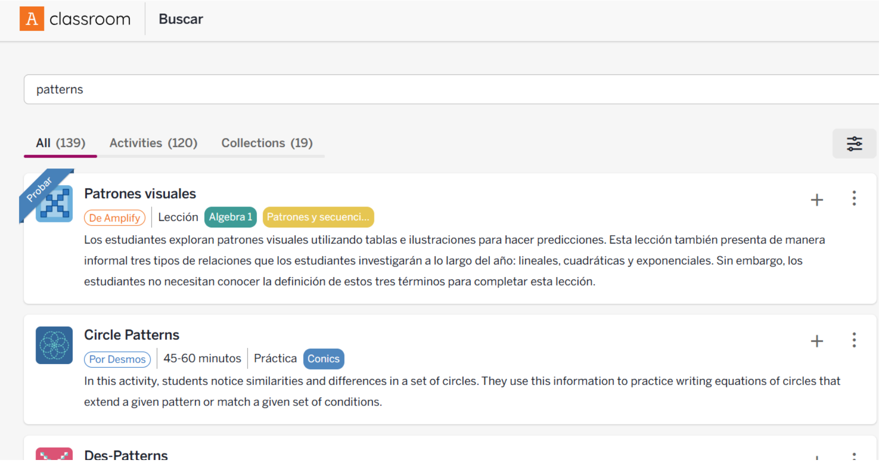
Bibliografía para profundizar en la didáctica del sentido algebraico.

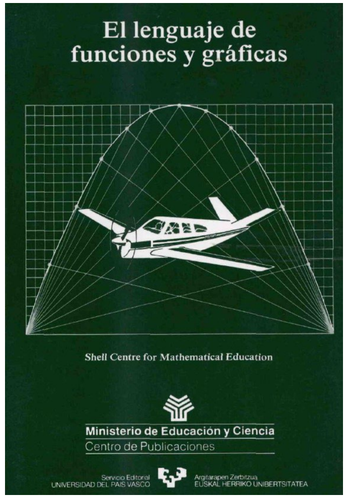
Materiales y recursos

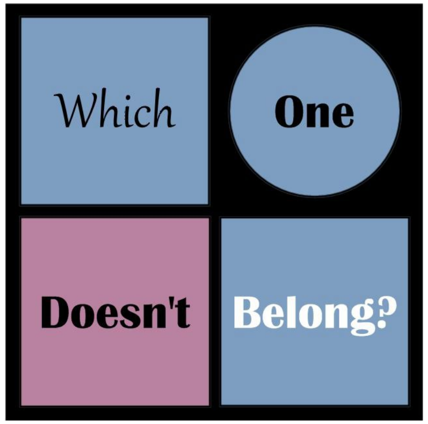
Además de los ya mencionados





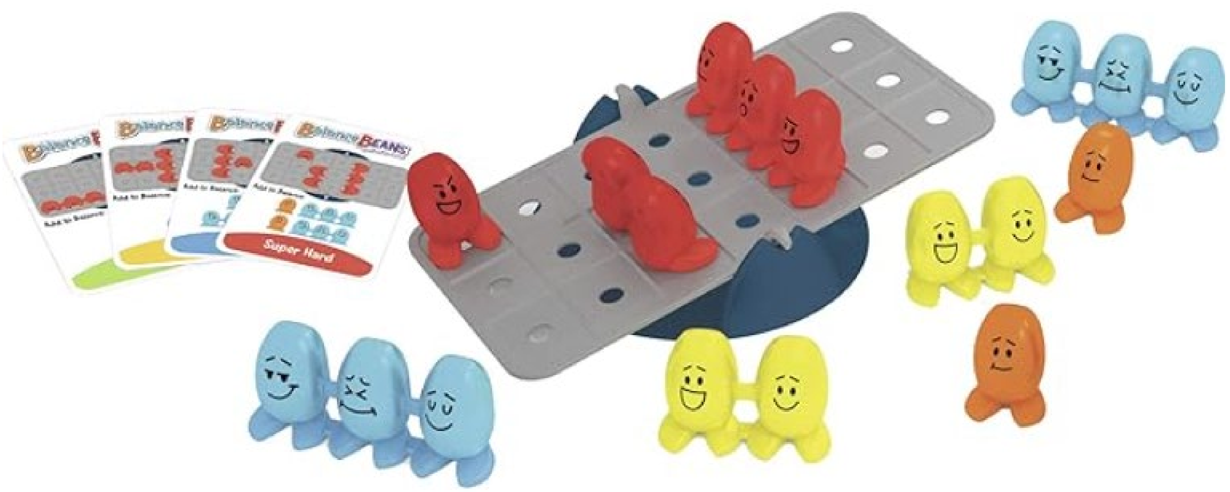






GeoGebra

Pueden ser interesantes:

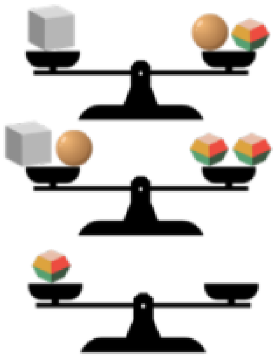


Pueden ser interesantes:

OLIMPIADAS MATEMÁTICAS ARAGONESAS

9. ¿Cuántas esferas hacen falta para equilibrar la tercera balanza?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4



Problema 3. El triángulo de Sierpinsky

Fíjate en la siguiente sucesión. Cada vez, se añade un triángulo negro en el centro de cada triángulo blanco. ¿Podrías completar la tabla?

	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4 (5 ptos)	NIVEL 5 (5 ptos)
Triángulos blancos	1	3	9	27		
Triángulos negros interiores	0	1	4	13		

https://sites.google.com/site/oma2eso/inicio

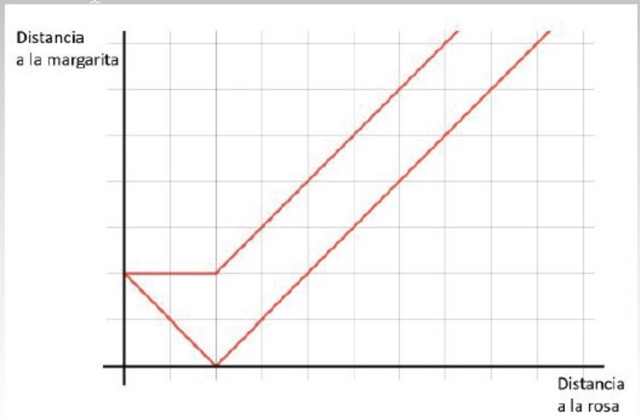
Pueden ser interesantes:

OLIMPIADAS MATEMÁTICAS ARAGONESAS

Problema 3 *Volando voy*

La gráfica representa la distancia a la que se encuentra una abeja de dos flores (una margarita y una rosa).

Describe y dibuja su trayectoria de vuelo.



https://sites.google.com/site/oma2eso/inicio

Pueden ser interesantes:

De la aritmética al álgebra

Comunidad de docentes interesados en el enfoque didáctico de introducción escolar del número entero en un entorno algebraico (tesis de Eva Cid).
https://t.me/+kEdCFT-_M2cyYjBk

En el currículo aragonés:

- Policubos y material manipulativo para seriaciones y patrones
- Balanza numérica
- Máquina de cambiar
- Enlaces web a nrich, visualpattern y blog de donsteward

Fuente: Alsina y Bosch (2024)

En Alsina (2019):

- Recursos lúdico-manipulativos (geomosaicos, dominó de diferencias,…)
- Recursos literarios (Fibonacci, El diablo de los números,…)
- Recursos tecnológicos (calculadora, scratch y applets de illuminations, nlvm,…)

Para más materiales, consultar:

Alsina, Á., & Bosch, E. (2024). Álgebra en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido algebraico. *TANGRAM - Revista De Educação Matemática*, *7*(3), 2–31. https://doi.org/10.30612/tangram.v7i3.18851

Sesión “Sentido algebraico”

Elementos de didáctica del sentido algebraico:

- La transición entre aritmética y álgebra: rupturas entre quehaceres y diferentes significados de los signos.
- Distintas visiones del álgebra escolar.
- El proceso de generalización.
- Modelos de enseñanza de ecuaciones.
- Funciones y sus distintas representaciones.

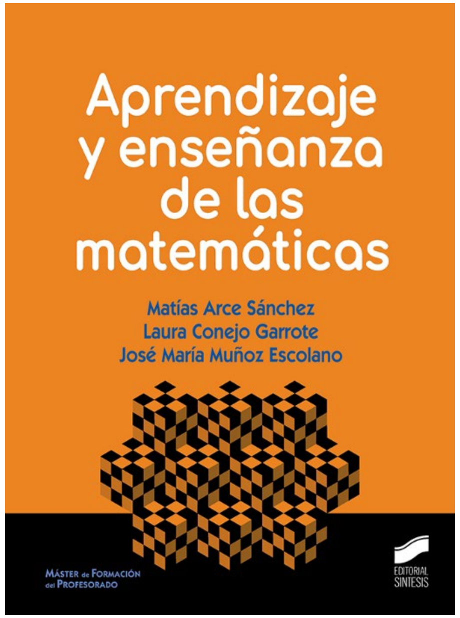
Los procesos matemáticos en el sentido algebraico.

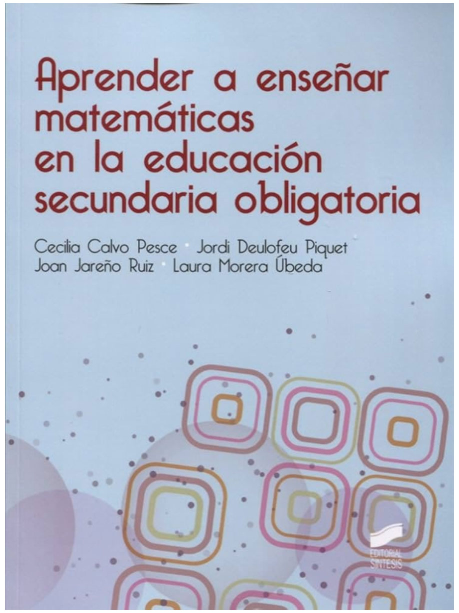
El sentido algebraico en el currículo aragonés.

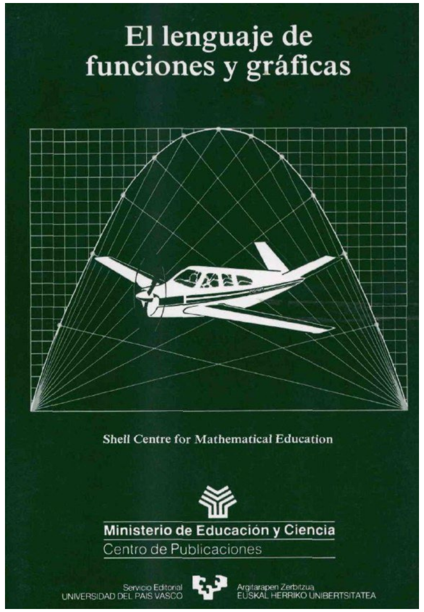
Materiales y recursos para trabajar el sentido algebraico.

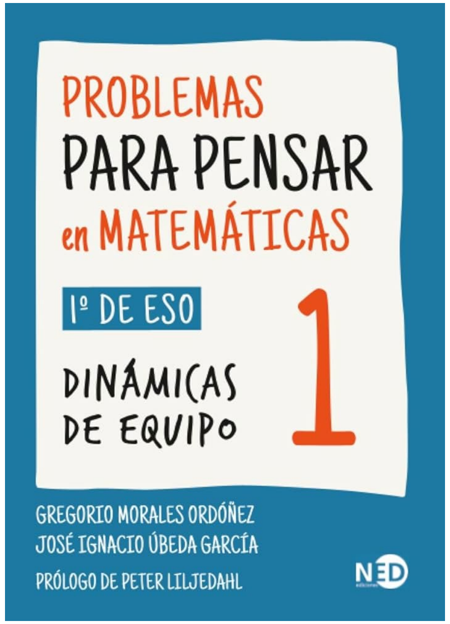
Bibliografía para profundizar en la didáctica del sentido algebraico.

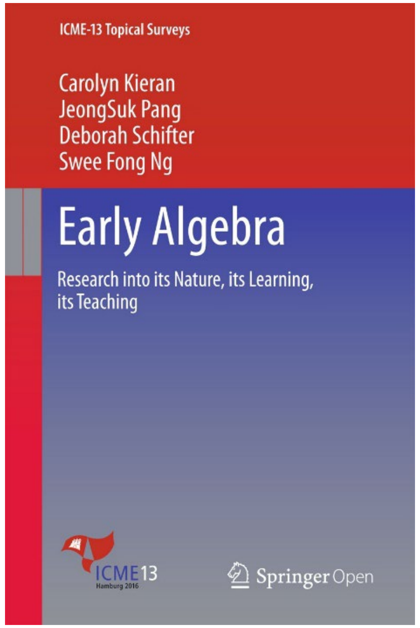
Bibliografía











Bibliografía

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz-Escolano, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Editorial Síntesis.

Alsina, A. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Graó.

Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J., y Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria*. Editorial Síntesis.

Shell Center for Mathematics Education (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Ministerio de Educación y Ciencia y Servicio Publicaciones de la EHU-UPV. https://www.libreria.educacion.gob.es/libro/el-lenguaje-de-funciones-y-graficas_144484/

Blanco, L., et al. (eds.) (2022). *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en Educación Matemática*. Editorial de la Universidad de Granada. https://editorial.ugr.es/libro/aportaciones-al-desarrollo-del-curriculo-desde-la-investigacion-en-educacion-matematica_139289/

Morales, G. y Úbeda, J.I. (2025). *Problemas para pensar en Matemáticas. 1º de ESO. Dinámicas de equipo*. NED.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., y Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer Nature. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-32258-2

Referencias de la presentación

Alsina, A. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Graó.

Alsina, Á., y Bosch, E. (2024). Álgebra en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido algebraico. *TANGRAM - Revista De Educação Matemática, 7*(3), 2–31.

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz-Escolano, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Editorial Síntesis.

Aznárez, M. G. (2011). *La introducción escolar del número entero: lo que se enseña y lo que se aprende*. (Trabajo Fin de Máster. Universidad de Zaragoza).

Beltrán-Pellicer, P. (2021). *Sistemas de ecuaciones en 2º ESO. Tierra de números*. https://tierradenumeros.com/post/hilo-sistemas-ecuaciones/

Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *BOLEMA, 28*(48), 64-88.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico (coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). ICE- Horsori.

Cid, M. E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos* (Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza).

Danielson, C. (2016). *Which One Doesn't Belong? A Shapes Book*. Stenhouse Publishers.

de la Fuente, A. (2016). *Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas. El rol del conocimiento del profesor*. (Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona). https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2016/hdl_10803_399341/jadlfp1de1.pdf

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143-168.

García, J. (2016). *Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas* (Tesis doctoral. Universidad de Granada).

González-Astudillo, M. T. , Sierra, M., y Esteban-López, C. (1998). Funciones: traducción entre presentaciones. *Aula*, *10*, 89-104.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. y Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education, 37*(4), 297-312.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary student' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*, 7(1), 341-368.

Shell Center for Mathematics Education (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Ministerio de Educación y Ciencia y Servicio Publicaciones de EHU-UPV.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra.* Síntesis.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 8-19). NCTM.

Curso asesores ARCOMAT

Sesión “Sentido algebraico y pensamiento computacional II”

22 de septiembre de 2025

José María Muñoz Escolano (jmescola@unizar.es)

Universidad Zaragoza
1474