Enseñar Geometría competencialmente

Desarrollar las competencias y aprender Geometría

CURSO – Matemáticas en la LOMLOE: Diseño curricular y enseñanza competencial

Alberto Arnal Bailera – Área de Didáctica de la Matemática – Universidad de Zaragoza

Centro de Profesorado Juan de Lanuza

Facultad de Educación Universidad Zaragoza

Hoy tenemos:

PARTE 1:

- Modelo de VH de desarrollo del pensamiento geométrico.
- Cuestiones sobre el Teorema de Pitágoras.
- Modelo VH vs. libro de texto:
  - Orden en los contenidos a trabajar.
  - Metodología.
  - ¿Qué falta cuando usamos un libro de texto?
- Práctica: Elaboración de una secuencia bajo VH “reciclando” un libro de texto.

PARTE 2:

- ¿Cómo integrar GGB en la UD?
  - Libros y Lecciones
  - Preguntas
- Taller GeoGebra para el razonamiento:
  - Triángulos y ejemplos
  - Conjetura + argumentación
  - Definir es argumentar

Modelo de VH de desarrollo del pensamiento geométrico

Reflexión previa

"[…] la explicación de numerosas incongruencias y errores reiterados por parte de los estudiantes, […], se encuentra en una incomprensión entre profesores y alumnos, los cuales hablan y razonan en diversos niveles." (Jaime, 1995)

↓

Niveles de razonamiento geométrico de van Hiele

Definición?

¿Cómo se puede definir una cosa antes de saber lo que hay que definir?

La mayoría de las definiciones no son preconcebidas, sino el toque final de la actividad organizadora.

No hay que privar al niño de este privilegio...

Hans Freudenthal

PROPUESTA DE LOS VAN HIELE

Es posible encontrar diferentes niveles de perfección en el razonamiento de los estudiantes en Geometría.

Un estudiante sólo podrá comprender realmente cuando el profesor le enseñe a su nivel de razonamiento.

No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma en abstracto, sólo se aprende a razonar mediante la propia experiencia.

Los profesores deben tener en consideración la capacidad de razonamiento de sus alumnos al decidir la forma y el rigor de sus clases.

Niveles de Razonamiento

- **NIVEL 1** **Reconocimiento/Visualización**
- **NIVEL 2** **Análisis**
- **NIVEL 3** **Clasificación/deducción informal**
- **NIVEL 4** **Deducción formal**
- **NIVEL 5** **Rigor**

NIVEL 1: RECONOCIMIENTO/VISUALIZACIÓN

Nivel 1 (reconocimiento): La consideración de los conceptos es *global*. No se tienen en cuenta elementos ni propiedades.

- Se pueden incluir atributos que no son característicos del concepto en cuestión.

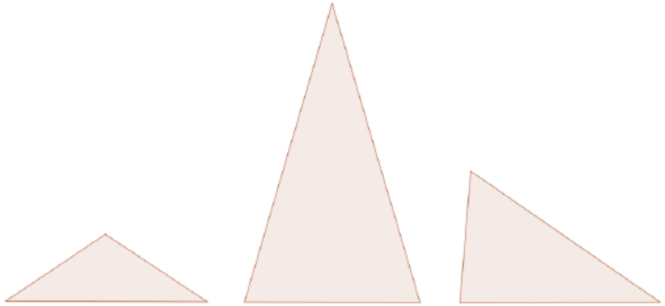


Fig 4. Todos tienen un lado horizontal.

- La consideración global del concepto puede no incluir propiedades fundamentales.

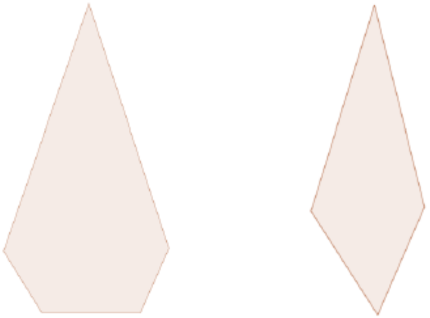


Fig 5. Se identifican como triángulos.

NIVEL 1: RECONOCIMIENTO/VISUALIZACIÓN

- Una figura geométrica es vista como un todo desprovisto de componentes o atributos.
- Se reconocen por sus formas visibles, no se reconocen las partes y no se explicitan sus propiedades determinantes.

Nivel 1 - Resumen

a) Percepción global de las figuras: en las descripciones se incluyen atributos de tipo físico irrelevantes.

b) Percepción individual de las figuras: cada figura es considerada como un objeto, independiente de otras figuras de la misma clase.

c) Uso de propiedades imprecisas para identificar, comparar, ordenar, o caracterizar figuras.

d) Aprendizaje de un vocabulario matemático básico.

e) No se suelen reconocer explícitamente las partes que componen las figuras ni sus propiedades matemáticas.

NIVEL 2: ANÁLISIS

Nivel 2 (análisis): Los conceptos se entienden y manejan a través de sus *elementos*. Se identifican y generalizan propiedades de dicho concepto pero no se establecen relaciones entre ellas.

Demostración: Se entiende como comprobación de unos pocos casos.

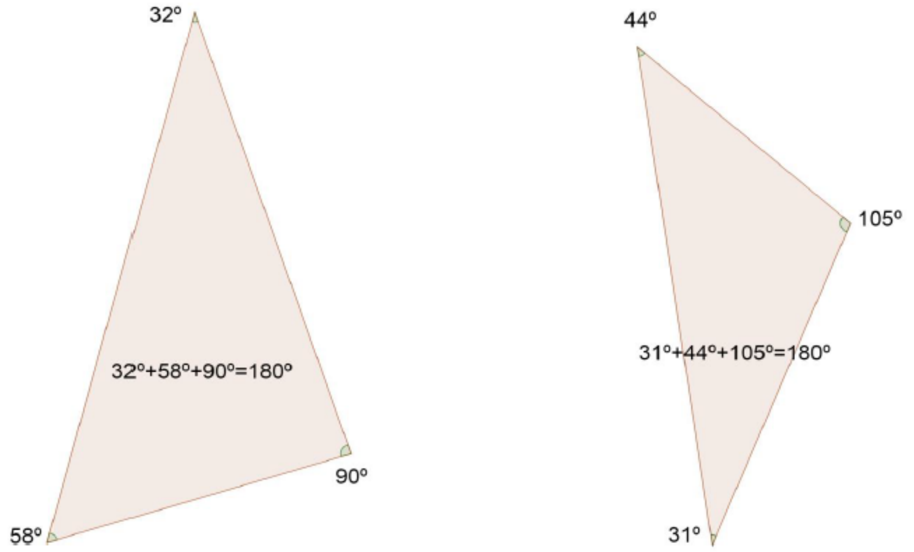


Fig 6. Demostración de nivel 2.

NIVEL 2: ANÁLISIS

Definición: Para definir un concepto se dan una lista de propiedades.

En ocasiones se omiten propiedades necesarias

Rectángulo

"paralelogramo con dos lados más largos que los otros dos"

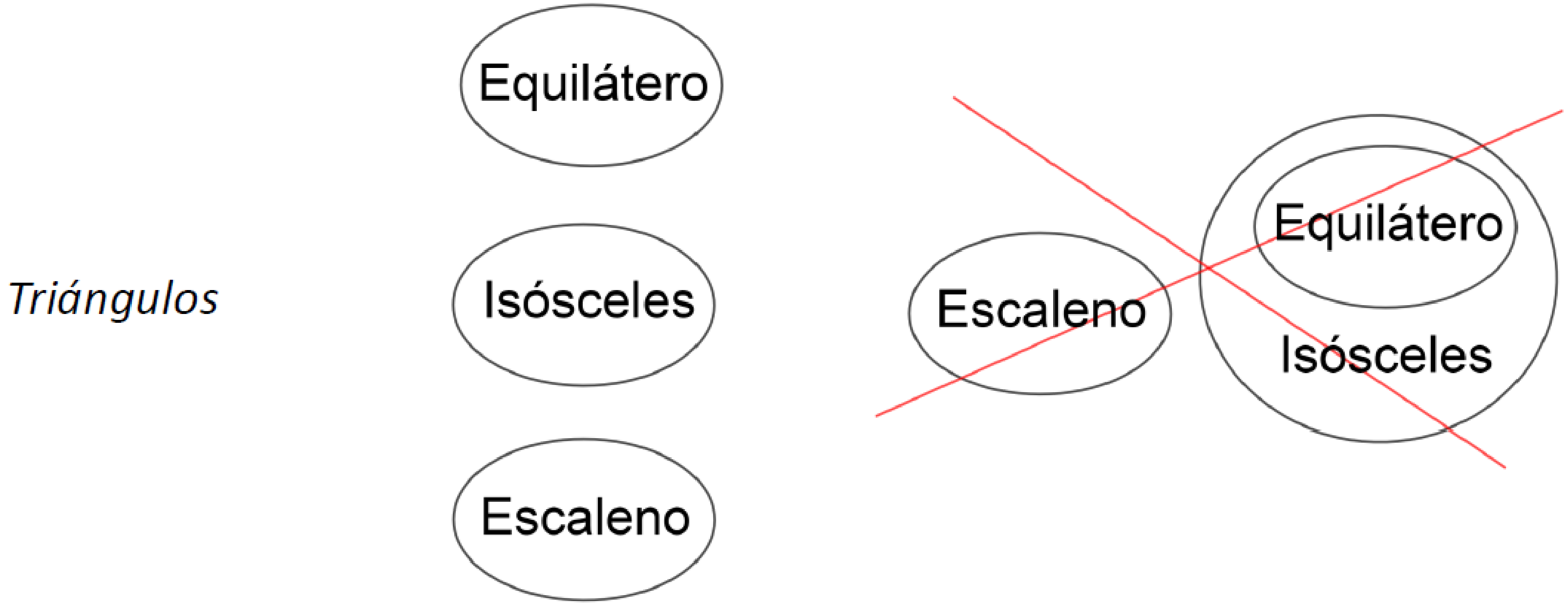
En ocasiones se dan más propiedades de las suficientes

Rectángulo

"paralelogramo con lados iguales dos a dos, ángulos rectos, dos diagonales iguales, dos ejes de simetría, … "

NIVEL 2: ANÁLISIS

Clasificación: las clasificaciones en este nivel son disjuntas.

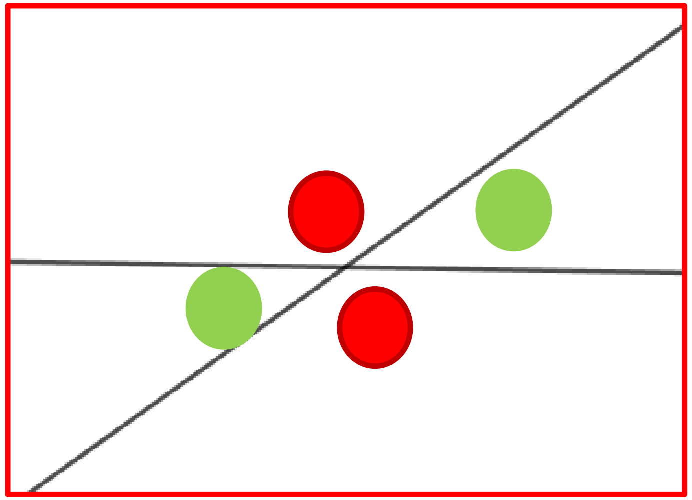


Ejemplo de actividad de nivel 2

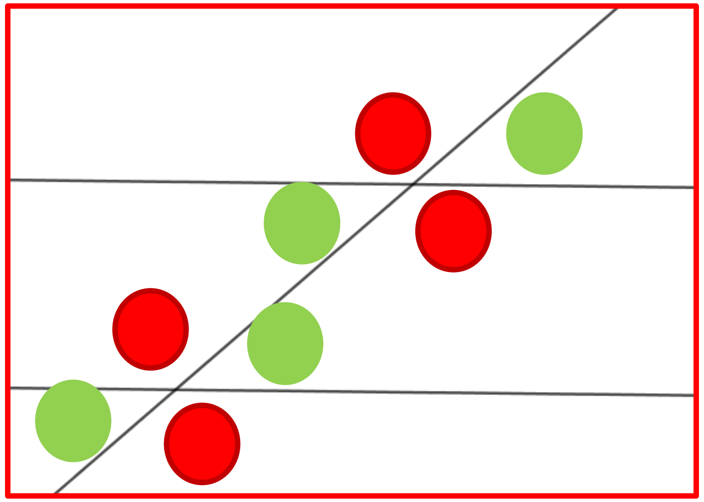
Dada una serie de paralelogramos los estudiantes podrían, "coloreando" los ángulos iguales, "establecer" que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

Después de usar varios ejemplos de este tipo, podrían hacer generalizaciones para todos los paralelogramos.

Si dos rectas son paralelas, se forman muchos ángulos iguales



Dos rectas que se cortan



Dos rectas paralelas que se cortan con una transversal

En cada caso, marca con el mismo color los ángulos que sean iguales.
Explica en cada caso cuántos ángulos hay de cada color y dónde están.

Nivel 2 - Resumen

a) Las **figuras geométricas están formadas por partes** y están dotadas de propiedades matemáticas.

b) La **definición** de un concepto consiste en el recitado de una lista de propiedades, (con **redundancias y omisiones**).

e) No se relacionan diferentes propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras. No se establecen clasificaciones a partir de relaciones entre propiedades.

d) La **deducción de propiedades se hace mediante experimentación**. Se generalizan dichas propiedades a todas las figuras de la misma familia.

e) La **demostración** de una propiedad se realiza mediante su **comprobación** en uno o pocos casos.

NIVEL 3: DEDUCCIÓN INFORMAL

Se pueden establecer interrelaciones en las figuras y entre figuras,

lo que permite deducir propiedades de una figura y reconocer clases de figuras,

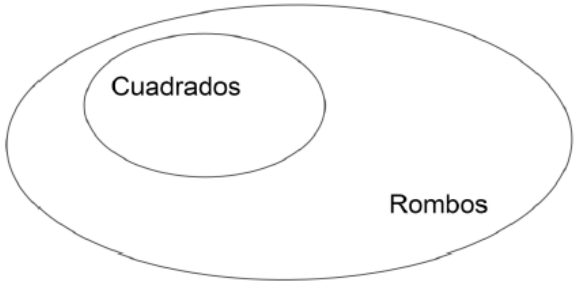
y entender y reproducir una demostración formal.

Las definiciones adquieren significado.

Rombo

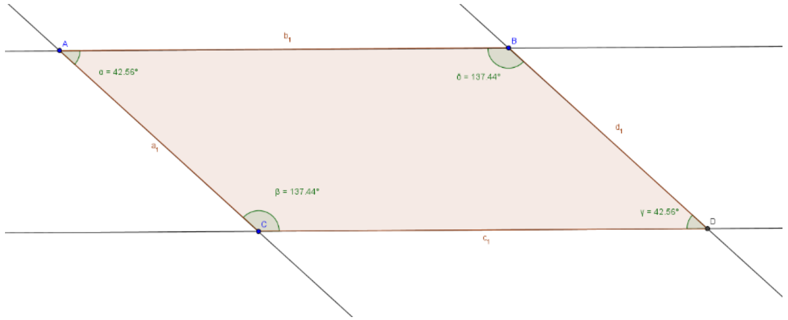
"cuadrilátero con todos sus lados iguales"

Se entiende la inclusión de clases.



Ejemplo de nivel 3

- En un cuadrilátero, para que los lados opuestos sean paralelos, es necesario que los ángulos opuestos sean iguales



- Entre figuras: un cuadrado es un rectángulo porque tiene todas sus propiedades
- <u>Podríamos trabajar clasificaciones “relajando” condiciones.</u>

Nivel 3 - Resumen

a) Capacidad para **relacionar propiedades** de una figura entre sí o con las de otras figuras.

b) **Comprensión** de lo que es una **definición matemática** y sus requisitos. Se definen correctamente conceptos y familias de figuras.

c) La **demostración** de una propiedad se basa en la **justificación general de su veracidad**, para lo cual se usan **razonamientos deductivos informales**.

d) Comprensión de los pasos de una demostración explicada por el profesor. Capacidad para repetir tal demostración, no para realizar una demostración completa.

Nivel 4 - Resumen

a) Capacidad para **comprender y desarrollar demostraciones** mediante razonamientos deductivos **formales**. Capacidad para adquirir una visión global de las demostraciones.

b) Aceptación de la posibilidad de **demostrar un resultado de diferentes formas** o a partir de distintas premisas.

c) **Aceptación de la existencia de definiciones equivalentes** de un concepto y uso indistinto de ellas.

d) Capacidad para **comprender la estructura axiomática de las matemáticas:** Significado y uso de axiomas, definiciones, teoremas, términos no definidos, etc.

Propiedades del Modelo de VH:

Secuencialidad: Los estudiantes pasan secuencialmente por los sucesivos niveles.
Instrucción: El avance entre niveles depende de la instrucción más que de la edad.
Explícito/Implícito: Los objetos implícitos en un nivel se explicitan en el siguiente.
Lingüístico: Cada nivel tiene vocabulario, símbolos y relaciones específicos.
Desajuste: El nivel del estudiante y de la instrucción deben ser el mismo.

Propiedades: Secuencialidad-Progresividad-Explícito/Implícito-Lingüístico-Desajuste

	ELEMENTOS EXPLÍCITOS	ELEMENTOS IMPLÍCITOS
NIVEL 1	Figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
NIVEL 2	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos
NIVEL 3	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos	Deducción formal de teoremas
NIVEL 4	Deducción formal de teoremas	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)

Fases de enseñanza de Van Hiele

Fase 1

INFORMACION

El profesor valora el razonamiento de sus estudiantes y decide cómo avanzar. Los estudiantes desarrollan vocabulario y recuerdan conocimientos previos.

Fase 2

ORIENTACIÓN DIRIGIDA

Los estudiantes trabajan en tareas dirigidas. Tareas cerradas pero no repetitivas que contribuyen a incrementar la comprensión y realizar conexiones entre conceptos.

Fase 3

EXPLICACIÓN

Los estudiantes discuten sobre sus descubrimientos entre ellos. El profesor modera/guía/conduce la discusión.

Fase 4

ORIENTACION LIBRE

Los estudiantes resuelven retos más complejos y descubren sus propias vías de completar cada tarea.

Fase 5

INTEGRACIÓN

Los estudiantes resumen lo que han aprendido obteniendo un panorama del objeto de que se trate.

La enseñanza desarrollada así promueve la adquisición de un nivel superior de razonamiento más que la edad o la madurez intelectual del alumno.

FASES DE ENSEÑANZA

FASE 1: DIAGNÓSTICO / INFORMACIÓN	a) ¿Cuál es el conocimiento previo? b) ¿Qué vamos a estudiar? – Vocabulario.
FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA	a) Trabajo con materiales. b) Cuestiones breves, sin ambigüedad y secuenciadas.
FASE 3: EXPLICITACIÓN – FASE TRANSVERSAL	a) Intercambio de experiencias entre alumnos. b) Se explicita el sistema de relaciones entre los conceptos.
FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE	a) Tareas abiertas, más largas, con varias formas de resolución o con varias soluciones posibles. b) No son ejercicios de “aplicación”
FASE 5: INTEGRACIÓN	a) Poner en orden lo explicado. Síntesis. b) El alumno adquiere una visión general de todo lo visto.

Cuestiones de enseñanza-aprendizaje del TP

2º ESO

B.2. Medición:

- Longitudes de forma indirecta mediante el teorema de Thales y de Pitágoras, áreas y volúmenes en figuras planas y tridimensionales: deducción, interpretación y aplicación de fórmulas.
- Representaciones planas de objetos tridimensionales en la visualización y resolución de problemas de áreas.
- Representaciones de objetos geométricos con propiedades fijadas.

C.1. Figuras geométricas de dos y tres dimensiones:

- Figuras geométricas planas y tridimensionales: descripción y clasificación de en función de sus propiedades o características.
- Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica en figuras planas y tridimensionales.: identificación y aplicación.
- Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada...)

3º ESO

C.1. Figuras geométricas de dos y tres dimensiones:

- Figuras geométricas planas y tridimensionales: descripción y clasificación de en función de sus propiedades o características.
- Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica en figuras planas y tridimensionales.: identificación y aplicación.
- Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada...)

Cuestiones de enseñanza-aprendizaje del TP

- Los libros de texto presentan:
  - directamente el enunciado del teorema, junto con la fórmula.
  - Después una demostración geométrica con áreas.
  - En ocasiones, el recíproco: distinguir tipos de triángulos según el cumplimiento o no del Teorema.
  - Finalmente, los libros incluyen aplicaciones del teorema para calcular distancias desconocidas.
- El alumnado en la mayoría de las ocasiones tiene una **comprensión parcial del Teorema que se limita a la fórmula y a su aplicación**.
- **La comprensión no incluye la doble implicación del teorema de Pitágoras entre tipo de triángulo y relación métrica**.

Cuestiones de enseñanza-aprendizaje del TP

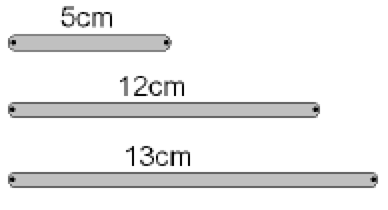
- Dar la interpretación geométrica, viendo que en los triángulos obtusángulos o acutángulos también aparece un "Teorema de Pitágoras" con desigualdades, transmite que **los resultados matemáticos surgen de la exploración sistemática de situaciones más que de la "casualidad".**
- El Teorema de Pitágoras extendido o generalizado tiene la utilidad de **conectar con la semejanza** de un modo natural.

Cuestiones de enseñanza-aprendizaje del TP

- Este Teorema es muy rico y puede aprovecharse también para trabajar una **idea intuitiva de demostración**, son particularmente interesantes las demostraciones de Bhaskara y Perigal.
- Para introducir las ideas de conjetura y prueba, pueden tener **mayor interés didáctico las demostraciones geométricas que las analíticas**, ya que las primeras resultan más accesibles (Cañadas, 2010)
- Los conceptos matemáticos no han de confundirse con una única representación
- ni con los procedimientos asociados a estos. (Troyano y Flores, 2016)

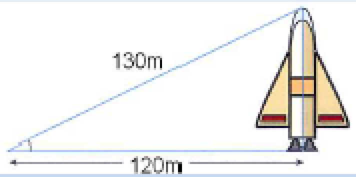
RESUMEN DE OBJETIVOS

1. Comprobación del teorema de Pitágoras.



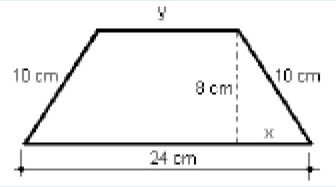
- Conocer el teorema de Pitágoras y saber sobre qué tipo de triángulos se puede aplicar.
- Determinar si una terna de medidas construye o no un triángulo rectángulo, obtusángulo o acutángulo.

2. Cálculo de un lado en un triángulo rectángulo.



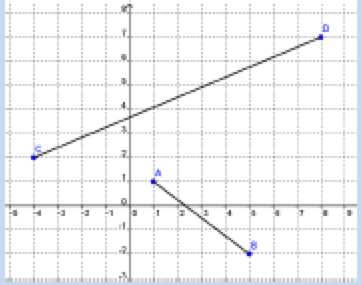
- Saber utilizar el teorema de Pitágoras para calcular el cateto o la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que conocemos dos de sus lados.

3. Cálculo de longitudes en una figura plana.



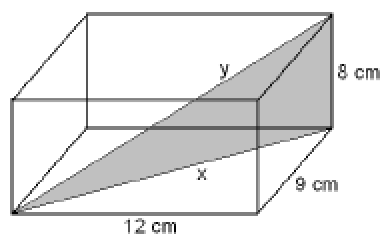
- Saber determinar triángulos rectángulos en distintas figuras del plano para calcular, a través de Pitágoras, ciertas medidas desconocidas, asociadas a las figuras.

4. Cálculo de longitudes y distancias en el plano.



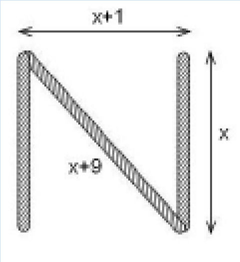
- Saber utilizar las acotaciones de los ejes cartesianos para conocer directamente medidas horizontales y verticales que permitan calcular la medida de segmentos oblicuos.

5. Cálculo de longitudes en un cuerpo.



- Saber determinar triángulos rectángulos en distintos cuerpos del espacio para calcular, a través de Pitágoras, ciertas medidas desconocidas asociadas a esos cuerpos.

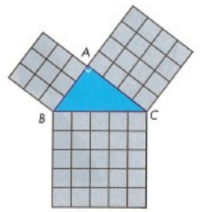
6. Ecuaciones asociadas al teorema de Pitágoras.



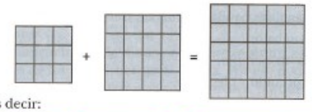
- Saber plantear y resolver ecuaciones asociadas a un triángulo rectángulo, aplicando adecuadamente el teorema de pitágoras.

https://www.matematicasonline.es/segundoeso/ejercicios/Pitagoras-cuadernillo.pdf

10.7 CUADRADOS SOBRE LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO



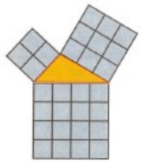
El triángulo ABC es **rectángulo** y en él se cumple que:



Es decir:

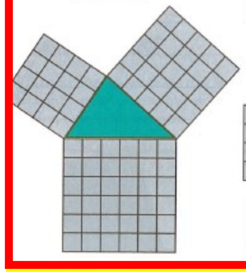
La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados menores es igual al área del cuadrado construido sobre el lado mayor.

Eso no ocurre en los triángulos que no son rectángulos.



Este otro triángulo es **obtusángulo.**

La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados pequeños es menor que el área del cuadrado construido sobre el lado mayor.



Este triángulo es **acutángulo.**

La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados pequeños es mayor que el área del cuadrado construido sobre el lado mayor.

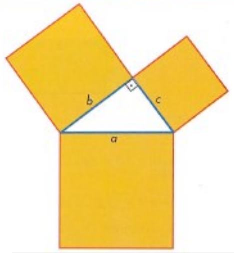
1 Para averiguar si el triángulo de lados 7 cm, 8 cm y 10 cm es rectángulo, acutángulo u obtusángulo sin necesidad de construirlo, procede del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l}7^2+8^2=49+64=113\\10^2=100\end{array}\right\}$$ Compara y decide. Después, constrúyelo y comprueba.

2 Haz lo mismo con el triángulo de lados 5, 12 y 13.

3 Haz lo mismo con el triángulo de lados 6, 8 y 11.

10.8 TEOREMA DE PITÁGORAS



Vamos a resumir los resultados de la página anterior.

En un triángulo rectángulo, los lados menores son los que forman el ángulo recto. Se llaman **catetos**. El lado mayor se llama **hipotenusa**.

b y c son los **catetos**.

a es la **hipotenusa**.

El teorema de Pitágoras dice que:

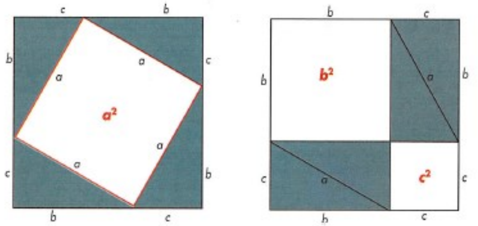
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Es decir:

El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Y esto es verdad solamente si el triángulo es rectángulo.

Para ver que es cierto que siempre que el triángulo es rectángulo ocurre esto, observa este curioso puzzle:



Observa que los dos cuadrados grandes son iguales. Si a cada uno de ellos le suprimimos cuatro triángulos iguales de lados a, b y c, queda:

a^2 en el primero, $b^2 + c^2$ en el segundo.

Por lo tanto, ha de ser $a^2 = b^2 + c^2$.

1 Dibuja en un papel aparte un cuadrado como los de arriba, de lado $b + c$. Recórtalo.

Dibuja cuatro triangulitos rectángulos iguales, de lados a, b y c. Recórtalos.

Situando los triangulitos sobre el cuadrado de una forma u otra, podrás reproducir las dos composiciones que se dan arriba. Se demuestra, así, el teorema de Pitágoras.

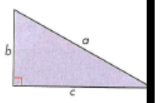
10.9 APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

I

De un triángulo sabemos que es rectángulo y conocemos los dos catetos.
Entonces, podemos calcular la hipotenusa:

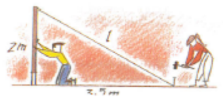
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Conociendo a^2 se puede calcular a.



Ejemplo

Para sostener un poste de 2 m de alto lo sujetamos con una cuerda situada a 3,5 m de la base del poste. ¿Cuál es la longitud, l, de la cuerda?



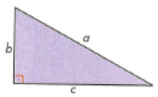
$l^2 = 2^2 + 3{,}5^2 = 4 + 12{,}25 = 16{,}25$

Si $l^2 = 16{,}25$, entonces $l = \sqrt{16{,}25}$

$l = 4$ m (con calculadora obtenemos $l = 4{,}03$ m).

Solución: La cuerda mide 4 m aproximadamente.

II



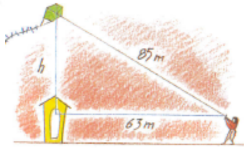
De un triángulo sabemos que es rectángulo y conocemos la hipotenusa y un cateto.
Entonces, podemos calcular el otro cateto:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

Conociendo c^2 se puede calcular c.

Ejemplo

La cuerda de una cometa mide 85 m. Ésta se encuentra volando sobre una caseta que está a 63 m de Lucía. ¿A qué altura sobre el suelo se encuentra la cometa?



$h^2 + 63^2 = 85^2$

$h^2 = 85^2 - 63^2 = 7\,225 - 3\,969 = 3\,256$

$h = 3\,256 = 57$ m

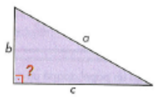
Solución: La altura a la que está la cometa es

$h = 57$ m + altura de Lucía

III

Si de un triángulo conocemos los lados, pero ignoramos si es o no rectángulo, podemos averiguarlo.

Para ello, comprobaremos si el cuadrado del lado mayor es o no igual a la suma de los cuadrados de los dos menores.



Ejemplo

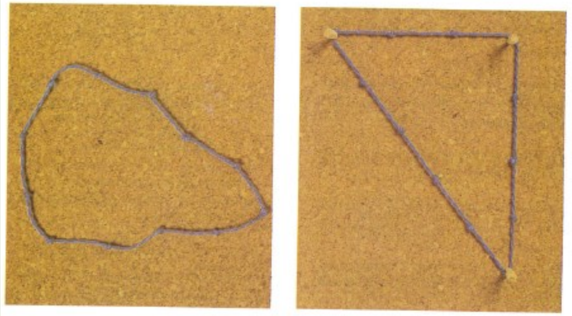
¿Son rectángulos los triángulos de lados: a) 17, 11, 20 ; b) 10, 24, 26?

a) $\left.\begin{array}{l}17^2+11^2=410\\20^2=400\end{array}\right\}$ No es rectángulo.

b) $\left.\begin{array}{l}10^2+24^2=100+576=676\\26^2=676\end{array}\right\}$ Sí es rectángulo.

NÚMEROS PITAGÓRICOS

Hace más de 3 000 años, los egipcios utilizaban el siguiente artilugio para construir ángulos rectos:



En una cuerda, mediante nudos, se señalan 12 tramos iguales.

Con unas estacas se tensa la cuerda, de modo que se forme un triángulo de lados 3, 4 y 5.

Entonces, el ángulo en el que confluyen los lados de longitudes 3 y 4 es recto.

Los números 3, 4 y 5, por cumplir la relación $3^2 + 4^2 = 5^2$, se llaman **pitagóricos.**

Tres números naturales, b, c, a, se llaman **pitagóricos** si cumplen la relación $b^2 + c^2 = a^2$. En tal caso, son los lados de un triángulo rectángulo.

La terna de números pitagóricos 3, 4, 5 es la más conocida. Intenta recordarla.

De ella se obtienen fácilmente 6, 8, 10; 30, 40, 50; 15, 20, 25;...

Otras ternas pitagóricas son:

5, 12, 13 → 25 + 144 = 169

8, 15, 17 → 64 + 225 = 289

1 Comprueba que $5^2 + 12^2 = 13^2$.
Construye un triángulo de lados 5 cm, 12 cm, 13 cm y comprueba que es rectángulo.

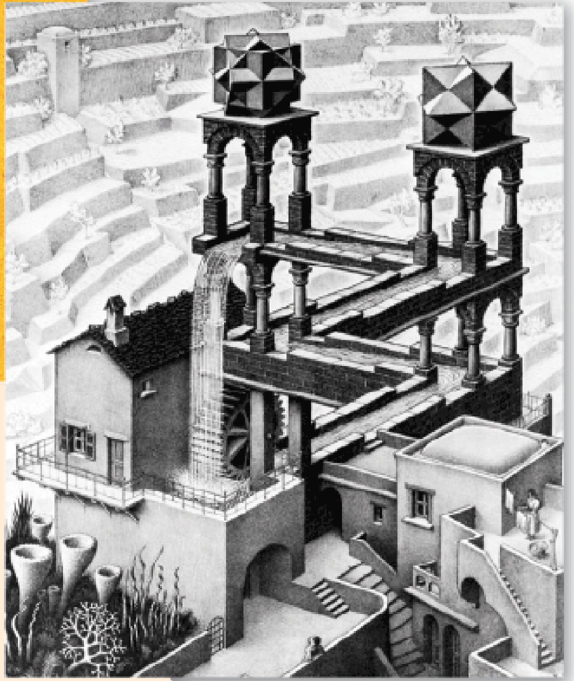
2 Los números 10, 24, 26 forman una terna pitagórica emparentada con 5, 12, 13 (son el doble). Inventa otra.

3 Comprueba que $8^2 + 15^2 = 17^2$.
Construye un triángulo de lados 8 cm, 15 cm y 17 cm y comprueba que es rectángulo.

4 Construye dos ternas pitagóricas emparentadas con 8, 15, 17.

CHAPTER

9 The Pythagorean Theorem



But serving up an action, suggesting the dynamic in the static, has become a hobby of mine . . . . The "flowing" on that motionless plane holds my attention to such a degree that my preference is to try and make it into a cycle.

M. C. ESCHER

Waterfall, M. C. Escher, 1961

OBJECTIVES

In this chapter you will

- explore the Pythagorean Theorem, one of the most important discoveries in mathematics
- use the Pythagorean Theorem to calculate the distance between any two points
- use conjectures related to the Pythagorean Theorem to solve problems

OBJECTIVES

In this chapter you will

- explore the Pythagorean Theorem, one of the most important discoveries in mathematics
- use the Pythagorean Theorem to calculate the distance between any two points
- use conjectures related to the Pythagorean Theorem to solve problems

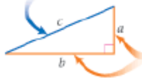
LESSON 9.1

The Theorem of Pythagoras

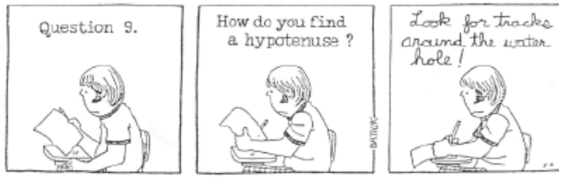
I am not young enough to know everything.
OSCAR WILDE

In a right triangle, the side opposite the right angle is called the **hypotenuse**. The other two sides are called **legs**. In the figure at right, a and b represent the lengths of the legs, and c represents the length of the hypotenuse.

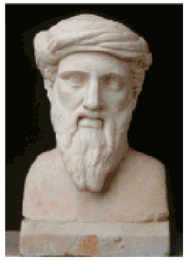
In a right triangle, the side opposite the right angle is called the **hypotenuse**, here with length c.



The other two sides are **legs**, here with lengths a and b.



FUNKY WINKERBEAN by Batiuk. Reprinted with special permission of North America Syndicate.

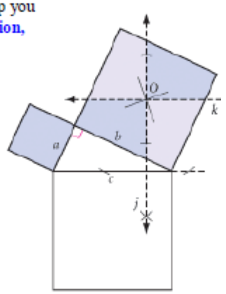


There is a special relationship between the lengths of the legs and the length of the hypotenuse. This relationship is known today as the **Pythagorean Theorem**.

Investigation
The Three Sides of a Right Triangle

You will need
- scissors
- a compass
- a straightedge
- the worksheet Dissection of Squares

The puzzle in this investigation is intended to help you recall the Pythagorean Theorem. It uses a **dissection**, which means you will cut apart one or more geometric figures and make the pieces fit into another figure.



Step 1 Separate the four diagrams on the worksheet so each person in your group starts with a different right triangle. Each diagram includes a right triangle with a square constructed on each side of the triangle. Label the legs a and b and the hypotenuse c. What is the area of each square in terms of its side?

Step 2 Locate the center of the square on the longer leg by drawing its diagonals. Label the center O.

Step 3 Through point O, construct line j perpendicular to the hypotenuse and line k perpendicular to line j. Line k is parallel to the hypotenuse. Lines j and k divide the square on the longer leg into four parts.

Step 4 Cut out the square on the shorter leg and the four parts of the square on the longer leg. Arrange them to exactly cover the square on the hypotenuse.

Step 5 State the Pythagorean Theorem.

The Pythagorean Theorem C-81

In a right triangle, the sum of the squares of the lengths of the legs equals __?__.

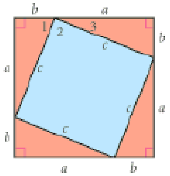
History CONNECTION

Pythagoras of Samos (ca. 569–475 B.C.E.), depicted in this statue, is often described as "the first pure mathematician." Samos was a principal commercial center of Greece and is located on the island of Samos in the Aegean Sea. The ancient town of Samos now lies in ruins, as shown in the photo at right.

Mysteriously, none of Pythagoras's writings still exist, and we know very little about his life. He founded a mathematical society in Croton, in what is now Italy, whose members discovered irrational numbers and the five regular solids. They proved what is now called the Pythagorean Theorem, although it was discovered and used 1000 years earlier by the Chinese and Babylonians. Some math historians believe that the ancient Egyptians also used a special case of this property to construct right angles.

A **theorem** is a conjecture that has been proved. A demonstration, like the one in the investigation, is the first step toward proving the Pythagorean Theorem.

There are more than 200 proofs of the Pythagorean Theorem. Elisha Scott Loomis's *Pythagorean Proposition*, published in 1927, contains original proofs by Pythagoras, Euclid, Leonardo da Vinci, and U.S. President James Garfield. One well-known proof is included below. You will complete another proof as an exercise.



Paragraph Proof: The Pythagorean Theorem

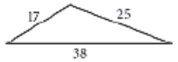
You can arrange four copies of any right triangle into a square, as shown at left. You need to show that $a^2 + b^2$ equals c^2. The area of the entire square is $(a + b)^2$, or $a^2 + 2ab + b^2$. The area of each triangle is $\left(\frac{1}{2}\right)ab$, so the sum of the areas of the four triangles is $2ab$. Using subtraction, the area of the quadrilateral in the center is $(a^2 + 2ab + b^2) - 2ab$, or $a^2 + b^2$.

You now need to show that the quadrilateral in the center is a square with area c^2. You know that all the sides have length c, but you also need to show that the angles are right angles. The sum $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3$ is 180° and the sum $m\angle 1 + m\angle 3$ is 90° because the third angle in each triangle is a right angle. Using subtraction, $m\angle 2$ is 90°, so $\angle 2$ is a right angle. The same logic applies to all four angles of the quadrilateral, so it is a square with side length c and area c^2. Therefore, $a^2 + b^2 = c^2$, which proves the Pythagorean Theorem. ■

Acute triangle

$6^2 + 7^2 > 8^2$

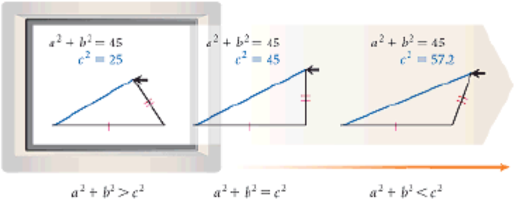
Obtuse triangle



$17^2 + 25^2 < 38^2$

keymath.com/DG

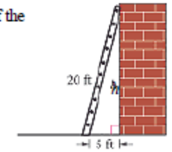
The Pythagorean Theorem works for right triangles, but does it work for all triangles? A quick check demonstrates that it doesn't hold for other triangles.



For an interactive version of this sketch, see the Dynamic Geometry Exploration The Theorem of Pythagoras at www.keymath.com/DG.

Let's look at a few examples to see how you can use the Pythagorean Theorem to find the distance between two points.

EXAMPLE A How high up on the wall will a 20-foot ladder touch if the foot of the ladder is placed 5 feet from the wall?



Solution The ladder is the hypotenuse of a right triangle, so $a^2 + b^2 = c^2$.

$$(5)^2 + (h)^2 = (20)^2 \quad \text{Substitute.}$$
$$25 + h^2 = 400 \quad \text{Multiply.}$$
$$h^2 = 375 \quad \text{Subtract 25 from both sides.}$$
$$h = \sqrt{375} \approx 19.4 \quad \text{Take the square root of each side.}$$

The top of the ladder will touch the wall about 19.4 feet up from the ground.

Notice that the exact answer in Example A is $\sqrt{375}$. However, this is a practical application, so you need to calculate the approximate answer.

EXAMPLE B Find the area of the rectangular rug if the width is 12 feet and the diagonal measures 20 feet.

Solution Use the Pythagorean Theorem to find the length.

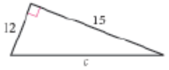
$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$(12)^2 + (L)^2 = (20)^2$$
$$144 + L^2 = 400$$
$$L^2 = 256$$
$$L = \sqrt{256}$$
$$L = 16$$

The length is 16 feet. The area of the rectangle is $12 \cdot 16$, or 192 square feet.

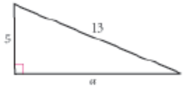
Exercises

In Exercises 1–11, find each missing length. All measurements are in centimeters. Use the symbol ≈ for approximate answers and round to the nearest tenth of a centimeter.

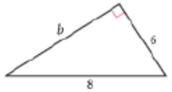
1.



2.

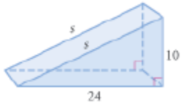


3.

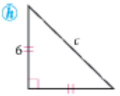


4.

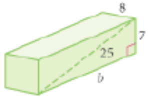
5.



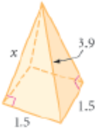
6. (h)



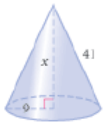
7.



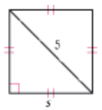
8.



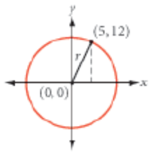
9. The base is a circle.



10.



11. (h)



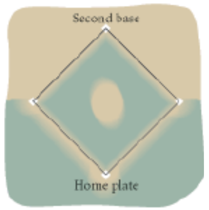
12. A baseball infield is a square, each side measuring 90 feet. To the nearest foot, what is the distance from home plate to second base?

13. The diagonal of a square measures 32 meters. What is the area of the square? (h)

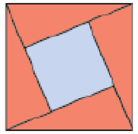
14. What is the length of the diagonal of a square whose area is 64 cm²?

15. The lengths of the three sides of a right triangle are consecutive integers. Find them. (h)

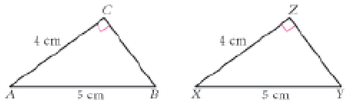
16. A rectangular garden 6 meters wide has a diagonal measuring 10 meters. Find the perimeter of the garden.



17. *Developing Proof* One very famous proof of the Pythagorean Theorem is by the Hindu mathematician Bhaskara. It is often called the "Behold" proof because, as the story goes, Bhaskara drew the diagram below and offered no verbal argument other than to exclaim, "Behold!" Use algebra to fill in the steps, explaining why this diagram proves the Pythagorean Theorem. (h)



18. *Developing Proof* Is $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$? Explain your reasoning.

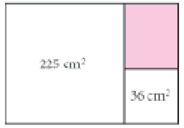


History CONNECTION

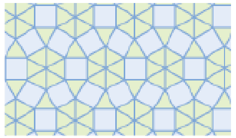
Bhaskara (1114–1185, India) was one of the first mathematicians to gain a thorough understanding of number systems and how to solve equations, several centuries before European mathematicians. He wrote six books on mathematics and astronomy, and led the astronomical observatory at Ujjain.

Review

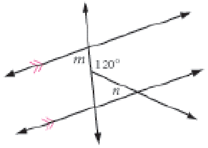
19. The two quadrilaterals whose areas are given are squares. Find the area of the shaded rectangle.



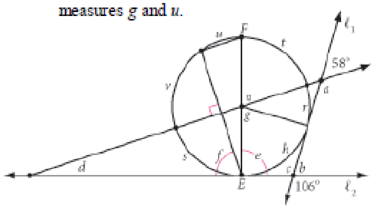
20. Give the vertex arrangement for the 2-uniform tessellation.



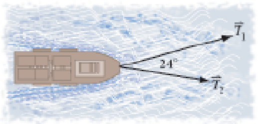
21. *Developing Proof* Explain why $m + n = 120°$.



22. *Developing Proof* Calculate each lettered angle, measure, or arc. $\overline{EF}$ is a diameter; ℓ_1 and ℓ_2 are tangents. Explain how you determined the measures g and u.

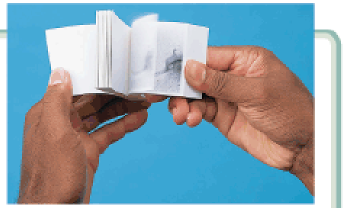


23. Two tugboats are pulling a container ship into the harbor. They are pulling at an angle of 24° between the tow lines. The vectors shown in the diagram represent the forces the two tugs are exerting on the container ship. Copy the vectors and complete the vector parallelogram to determine the resultant vector force on the container ship.



project

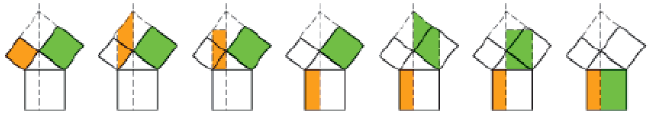
CREATING A GEOMETRY FLIP BOOK

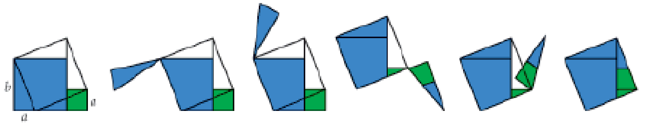


Have you ever fanned the pages of a flip book and watched the pictures seem to move? Each page shows a picture slightly different from the previous one. Flip books are basic to animation technique. For more information about flip books, see www.keymath.com/DG .

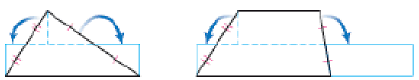
These five frames start off the photo series titled *The Horse in Motion* by photographer, innovator, and motion picture pioneer Eadweard Muybridge (1830–1904).

Here are two dissections that you can animate to demonstrate the Pythagorean Theorem. (You used another dissection in the Investigation The Three Sides of a Right Triangle.)





You could also animate these drawings to demonstrate area formulas.



Choose one of the animations mentioned above and create a flip book that demonstrates the formula. Draw the figures in the same position on each page so they don't jump around when the pages are flipped. Use graph paper or tracing paper to help. A helpful hint: the smaller the change from picture to picture, and the more pictures there are, the smoother the motion will be.

Your project should include

- A finished flip book that demonstrates a ge
- An explanation of how your flip book demo


Fase 1: Introd./investigación para conocer más los triángulos rectángulos.
CE1/CE2/CE3 … CE6
Fase 2: Actividades guiadas para preparar la aparición de pequeñas conclusiones sobre coincidencia de áreas.
CE1/CE4/CE9
Fase 3: Actividades que provoquen el intercambio de información y la discusión entre los estudiantes y con el profesor.
CE3/CE7/CE8/CE10
Fase 4: Actividades abiertas que fomenten la investigación.
CE1/CE3/CE5/CE6/CE7/CE10
Fase 5: Actividades para aclarar los resultados.
CE5, CE7, CE6

FASE 1

- Dibujar diferentes triángulos: acutángulos, obtusángulos y rectángulos en papel cuadriculado.
- Repasar la clasificación de triángulos.
- ¿cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo?
- ¿Por qué? ¿Necesitas argumentarlo? -> Hacer surgir la necesidad de convencer a los demás.
- En esta unidad (y en todas), se trata de argumentar. También hay que introducir que es normativo hacerlo y qué herramientas son válidas: recortables, GeoGebra, fórmulas…
- ¿Es necesario repasar la fórmula del área de un cuadrado? ¿otras áreas?

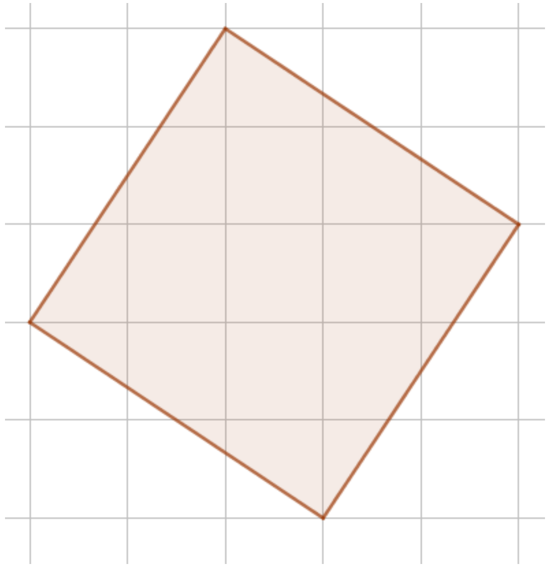
CE1

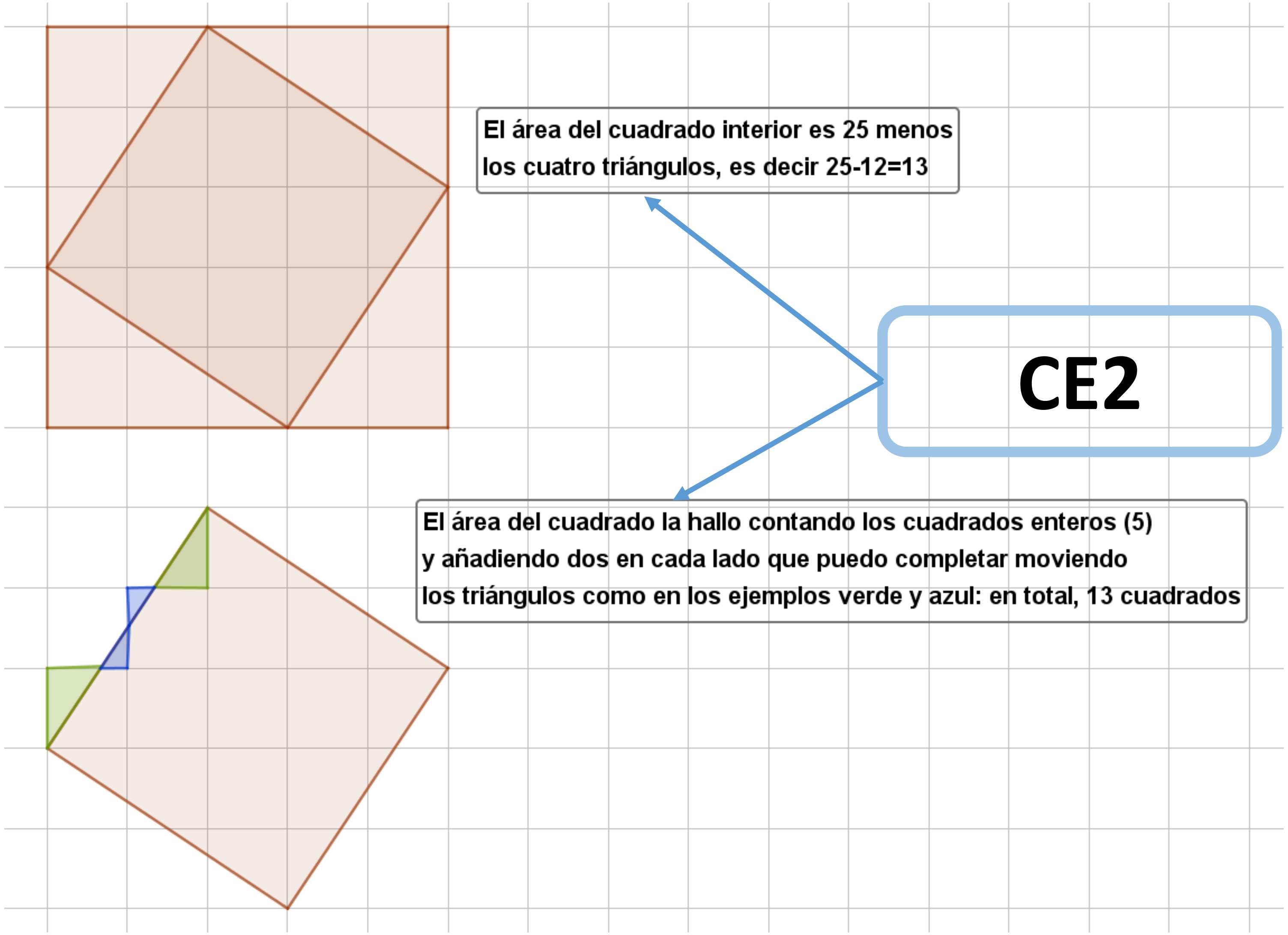
CE3

CE1

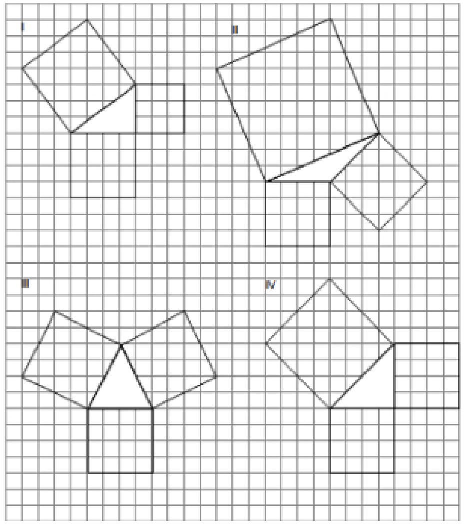
FASE 1

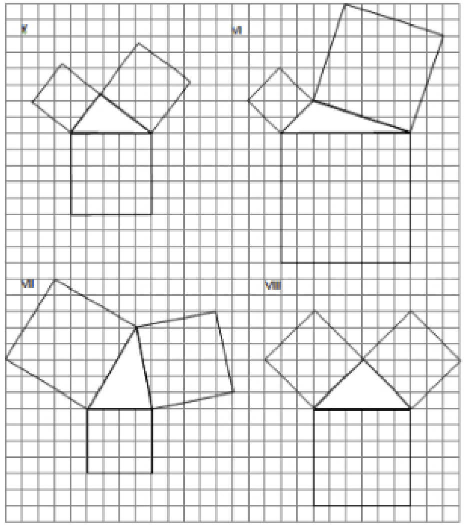
¿Cómo calculamos las áreas? Encapsulado y descomposición.





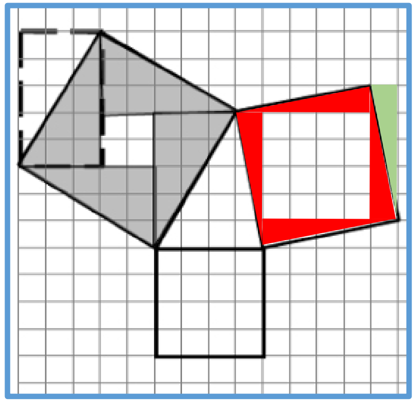
FASE 2: Medición de áreas y longitudes.





Ejercicio 1: Completa la siguiente tabla:

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Longitud de lado	Pequeño								
	Mediano								
	Grande								
Área de cuadrado sobre	Lado Pequeño								
	Lado Mediano								
	Lado Grande								
Clase Triángulo									



CE4

Idea: en unos se empieza por el lado y en otros por el área

Basado en Troyano y Flores (2016)

FASE 3: Elaboración/comunicación de conjeturas.

Ejercicio 1: Completa la siguiente tabla:

		I	II	III
Longitud de lado	Pequeño			
	Mediano			
	Grande			
Área de cuadrado sobre	Lado Pequeño			
	Lado Mediano			
	Lado Grande			
Clase Triángulo				

Ejercicio 2: Entre tu pareja y tú, debéis **expresar con vuestras palabras** lo que **observáis** en la tabla anterior. (Debéis buscar la relación que hay entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos.)

CE3 3.1

CE7 7.1

CE8 8.1

Idea: mirar los números junto con las figuras

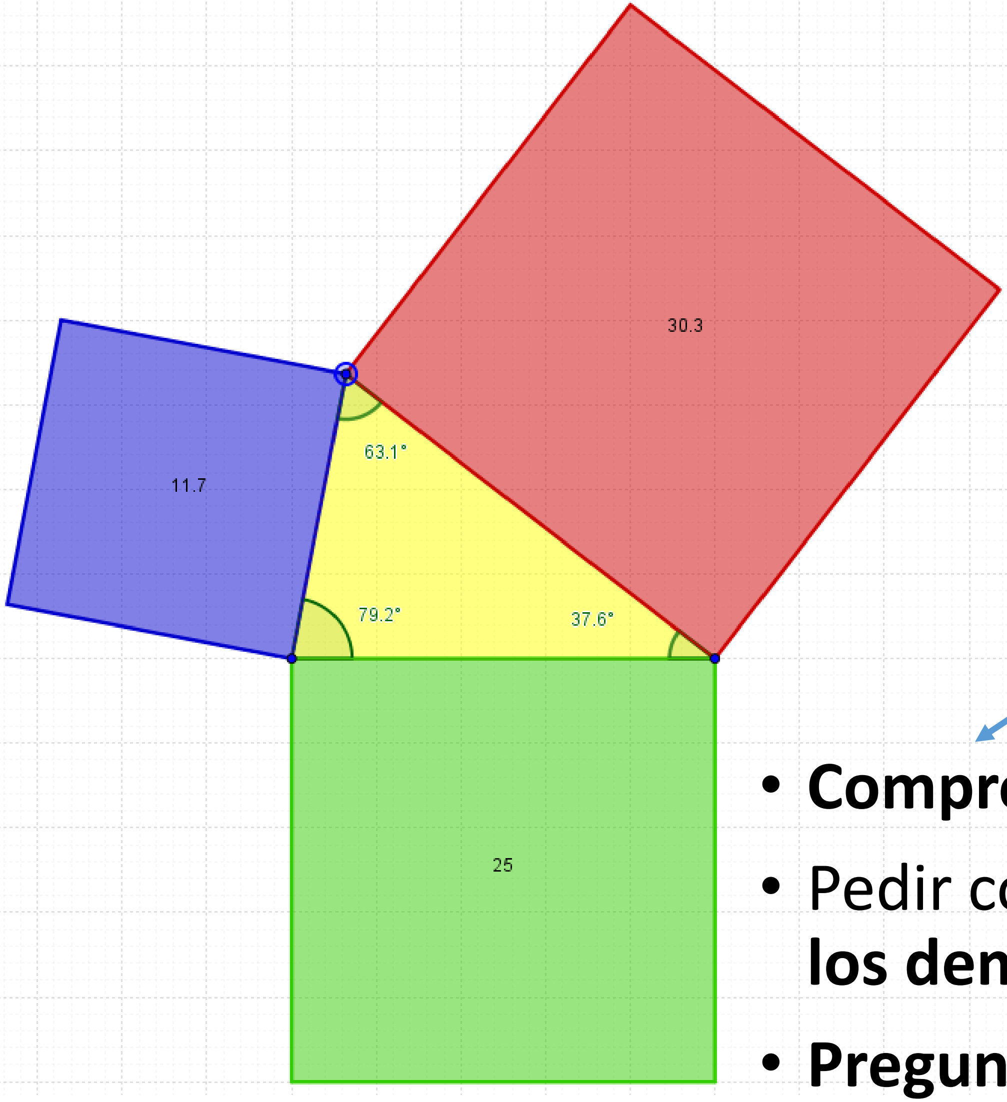
Idea: relacionar con el tipo de triángulo

Idea: trabajar por separado cada tipo de triángulo

Idea: analizar primero los triángulos rectángulos

FASE 3: Comprobación de una conjetura

CE3 3.3



área azul: 11.7

área verde: 25

área roja: 30.3

Suma de las dos áreas pequeñas= 36.7

el cuadrado grande tiene menos área que la suma de los otros dos

- **Comprobar** con GGB lo observado.
- Pedir construir una **lista de ejemplos para convencer a los demás.** “no tenemos tiempo para crear todos”
- **Preguntas que generen debate en Fases 2 y 4**

FASE 3: **2 posibles redacciones**

Idea: ¿Estamos diciendo lo mismo?

- SOLO Cuando la suma de las áreas de los cuadrados pequeños coincide con el área del cuadrado grande, el triángulo es rectángulo.

- SOLO Cuando el triángulo es rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados pequeños coincide con el área del cuadrado grande.

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Longitud de lado	Pequeño								
	Mediano								
	Grande								
Área de cuadrado sobre	Lado Pequeño								
	Lado Mediano								
	Lado Grande								
Clase Triángulo									

FASE 2

Ejercicio 3: Empleando papel cuadriculado, dibuja cada triángulo, los cuadrados sobre sus lados y completa la siguiente tabla:

		A	B	C	D
Longitud de lado	Cateto Pequeño	1		2	
	Cateto Mediano	2			
	Hipotenusa			6	
Área de cuadrado sobre	Cateto Pequeño		36		
	Cateto Mediano		64		24
	Hipotenusa				81
Clase Triángulo		RECTÁNGULO	RECTÁNGULO	RECTÁNGULO	RECTÁNGULO

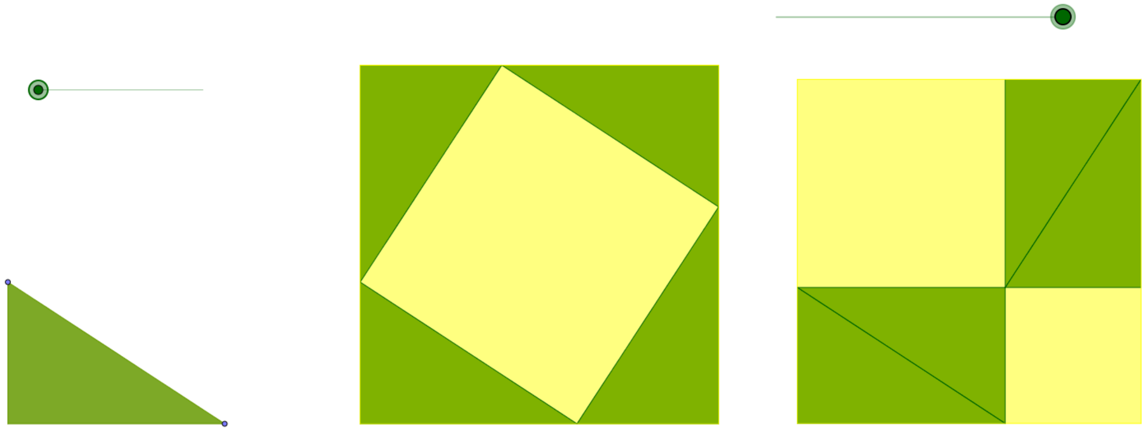
CE1

Troyano y Flores (2016)

FASE 4: Acercamiento a la demostración del Teorema de Pitágoras.

CE3 3.1/3

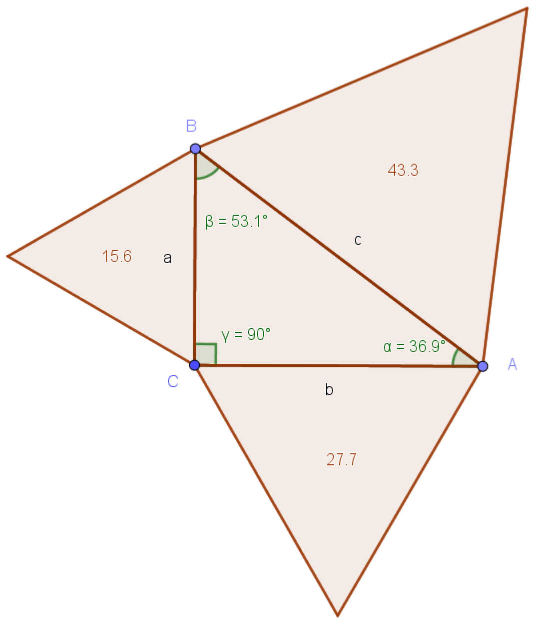
- Construye en papel las dos distribuciones de los triángulos en el cuadrado y recorta las piezas.
- Manipula el applet.
- Empleando lo que observas tanto en papel como en el applet, elabora un informe que explique qué está pasando. ¿Qué triángulos aparecen? ¿Qué puedes decir de los cuadrados? ¿Y de sus áreas?

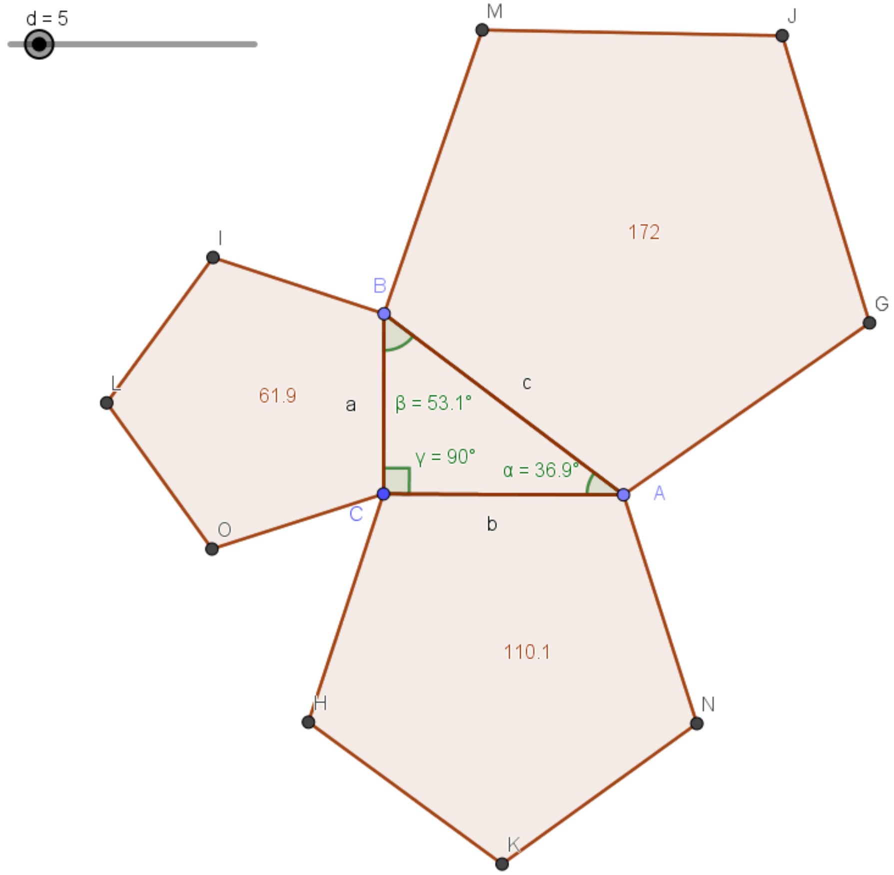


FASE 4: Iniciación a la generalización

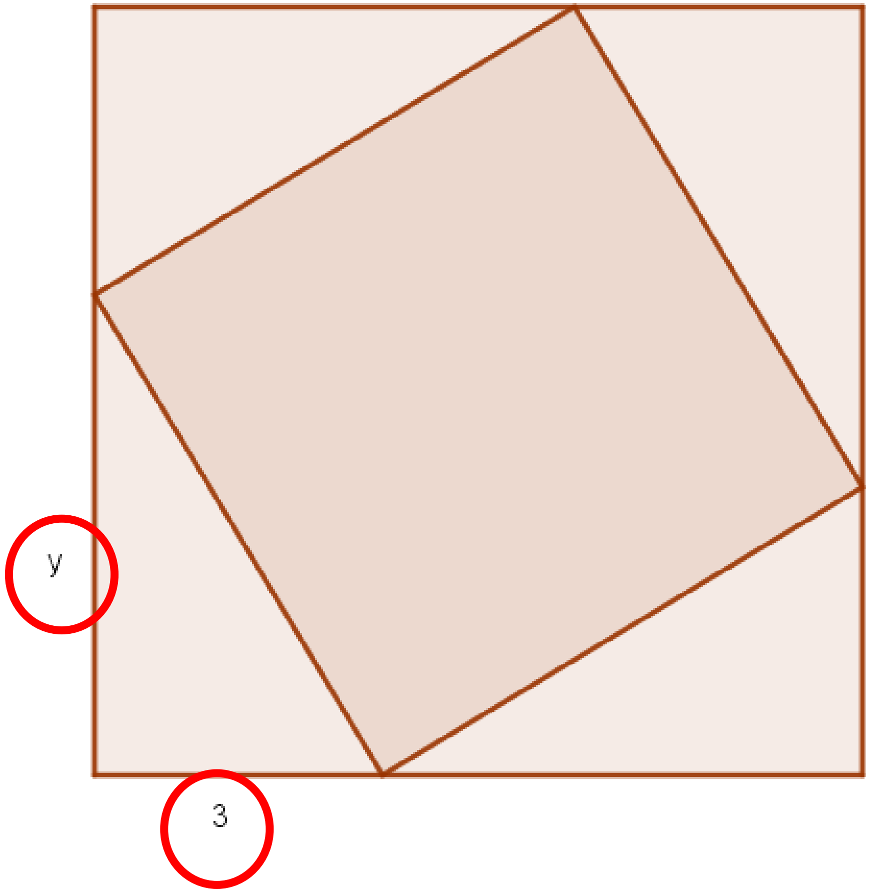
CE3

Investigar qué pasa si lo que se construye sobre cada lado es un polígono regular cualquiera.





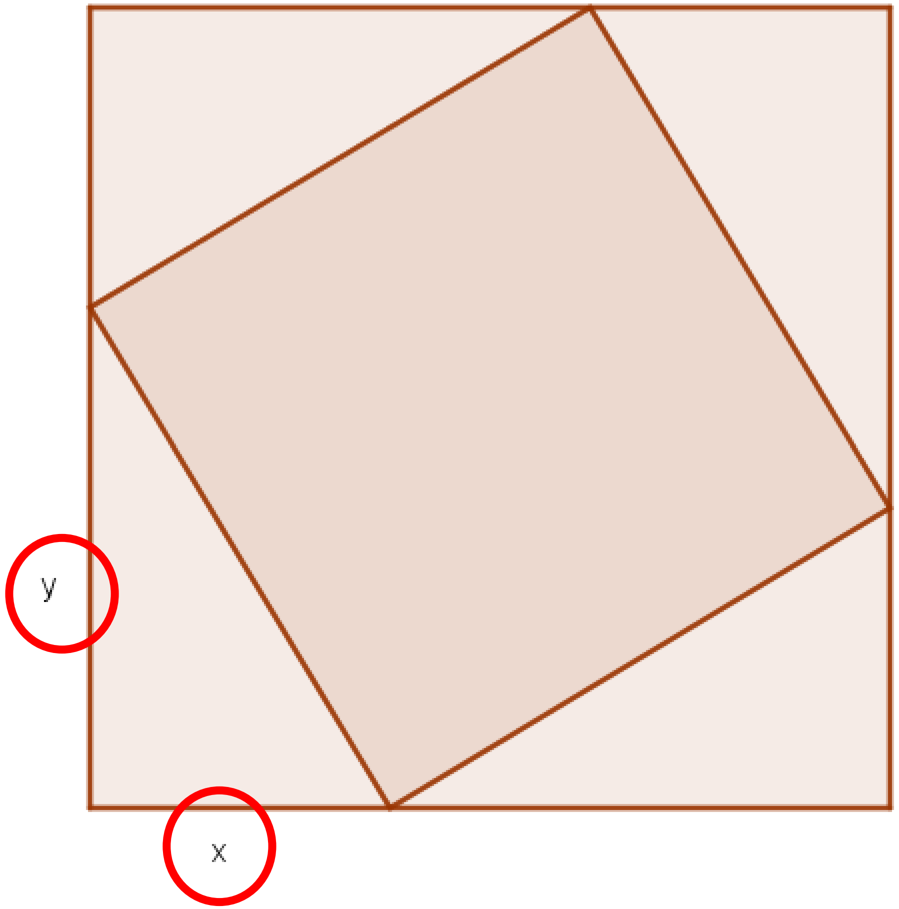
FASE 4: Conectar con la expresión algebraica



¿Qué podemos decir del área del cuadrado exterior?
¿Qué podemos decir del área de los triángulos?
¿Qué podemos decir del área del cuadrado interior?

CE5

FASE 4: Conectar con la expresión algebraica



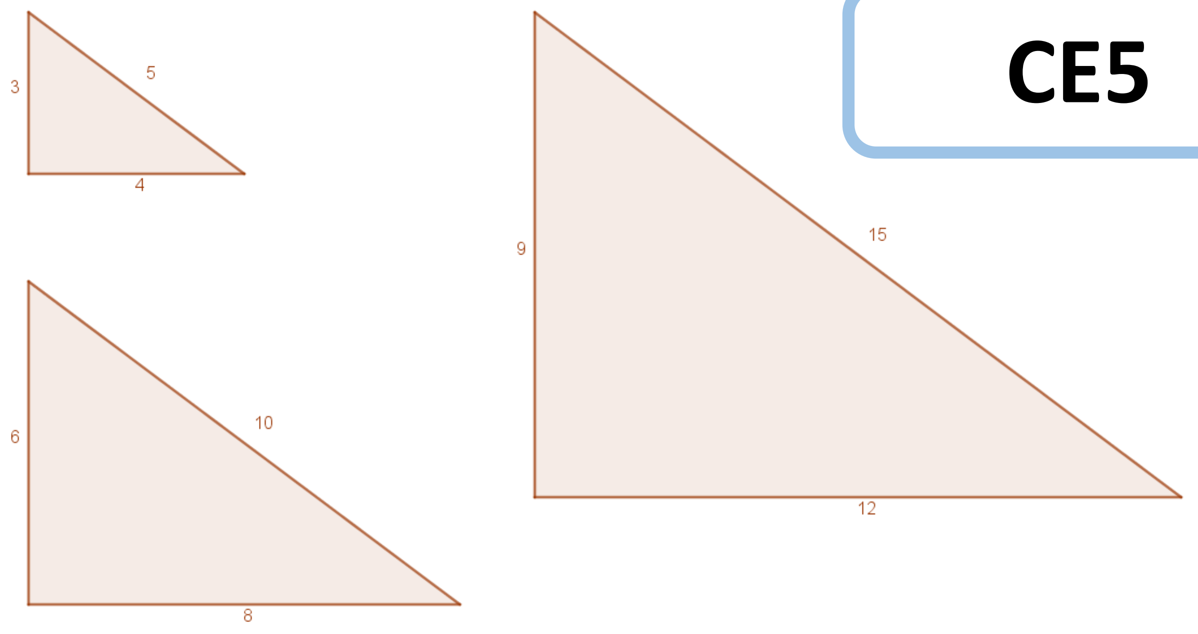
¿Qué podemos decir del área del cuadrado exterior?
¿Qué podemos decir del área de los triángulos?
¿Qué podemos decir del área del cuadrado interior?

CE5

FASE 4: Conexiones

CE5

- En ocasiones (solo cuando a, b y c son las longitudes de tres segmentos que forman un t. rectángulo), ocurre que $a^2+b^2=c^2$
- Si a, b y c son números enteros (sin decimales), se les llama terna pitagórica. Ejemplos:
  - 6, 8 y 10 porque $6^2+8^2=10^2$
  - 10, 24 y 26 porque $10^2+24^2=26^2$
- Encuentra otras ternas pitagóricas relacionadas con las anteriores.
- Dibuja los triángulos correspondientes y encuentra qué elementos coinciden entre ellos.



a	b	c		a^2+b^2	c^2
6	8	10		100	100
10	24	26		676	676

FASE 5: Integración y conexión con semejanza

- Se reparten varias copias de varios cuadrados de diferentes lados (3,4,5,6,7,8,9 y 10) y se pide construir triángulos con ellos: dos rectángulos, dos acutángulos y dos obtusángulos.
- Se pide comparar los dos t. rectángulos y sacar conclusiones:
  - Respecto de las áreas de los cuadrados de forma verbal y como fórmula.
  - Respecto de los dos triángulos rectángulos.
- Si un triángulo es rectángulo, los que son semejantes a él lo son también.
  - Cada terna pitagórica primitiva genera una familia de ternas proporcionales a ella.
- Las tres figuras que se colocan en cada uno de los tres catetos, deben ser semejantes para que las sumas de las áreas coincidan.
- Esas tres figuras pueden ser regulares o irregulares, incluso curvas.

CE5 CE7

Taller de GeoGebra

- Uso de GeoGebra para inducir propiedades a través del uso de ejemplos.
- Uso de GeoGebra para apoyar procesos de argumentación.
- Uso de GeoGebra para apoyar procesos de definición.

- https://www.geogebra.org/m/mfnmztv9