TEORÍA DE GRAFOS

Una propuesta didáctica para 4º de la ESO

(Libro del profesor)

Carmen Julve Tiestos

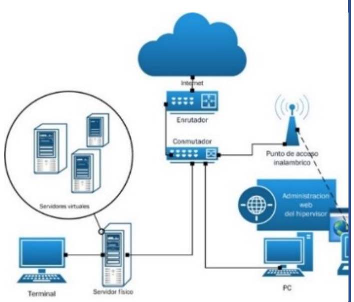
Depósito legal Z 538-2024

INDICE

1. REPRESENTAMOS LAS RELACIONES ENTRE PERSONAS, OBJETOS, ELEMENTOS…

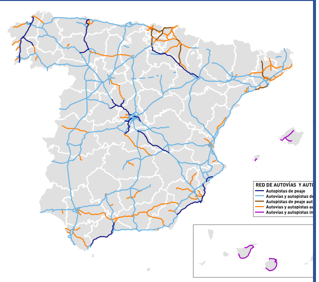
La vida está llena de conexiones y relaciones entre distintos elementos. Entre las personas hay relaciones de amistad, hay relaciones familiares, laborales. Entre ciudades hay relaciones con otras ciudades a través de las distintas carreteras que las unen, entre alimentos podemos encontrar conexiones si comparten ingredientes por ejemplo, entre números hay multitud de relaciones por ejemplo podemos estudiar las relaciones de los números que tienen divisores en común…

Relaciones de amistad



Red informatica

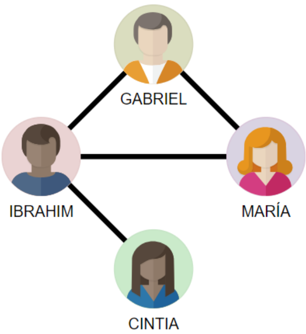
Conexiones neuronales



Carreteras de España

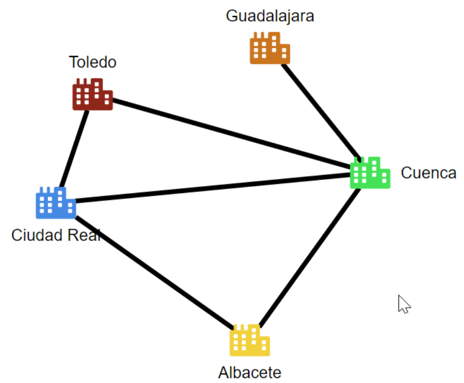
¿Se te ocurre algún ejemplo más de tipos de conexiones entre personas, objetos, números…?

Fíjate en la siguiente imagen, representa a personas y las líneas indican que están relacionadas de alguna manera, **inventa un tipo de relación que pueda haber entre ellas**, después **escoge una de las 4 personas y describe con qué otras personas está relacionada.**



Pueden indicar relaciones de trabajo, amistad, familiares, …

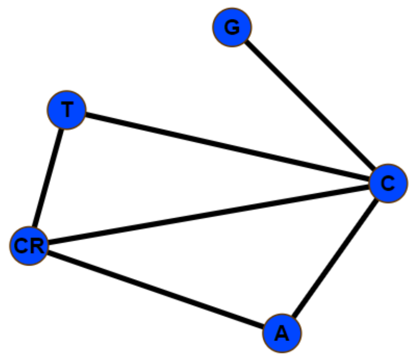
Trata de representar de forma similar a la imagen anterior **la relación entre las ciudades de Castilla-La Mancha** de forma que **dos ciudades están conectadas si comparten frontera.** Una vez que la tengas representada, compárala con la que ha hecho tu compañero.



Es probable que te haya quedado una figura similar a la de las 4 personas, las ciudades han quedado representadas con el icono de los edificios y si comparten frontera las unimos con una línea.
En matemáticas este tipo de representación se llama grafo, veamos una definición más exacta:

Un grafo es un conjunto de nodos o vértices que están relacionados y la manera de representar esa relación es mediante una línea (recta o curva), que llamaremos arista.
Lo escribiremos de la siguiente manera $G=\{V,A\}$; donde V **es el conjunto de vértices** y los representaremos con puntos (normalmente se denotan por un número o una letra). A **es el conjunto de aristas o pares de vértices que están relacionados**. Cada arista se denota por los dos vértices que une: si una arista une el vértice A con el B, será la arista AB. *(De momento la arista AB será lo mismo que la arista BA, así que puedes llamarla como prefieras)*

Representa ahora ahora el grafo de las ciudades de Castilla La Mancha con puntos y rayas. Utiliza como conjunto de vértices este V={ G, T, C, CR, A}. Escribe también el conjunto A de aristas.



V={ G, T, C, Cr, A}   A={ GC, CA, CT, CCr, TCr, ACr}

Fíjate en el grafo de las ciudades que han hecho varios de tus compañeros, ¿los han dibujado exactamente igual que tú? Si el dibujo no es el mismo, ¿entonces el grafo es distinto? ¿Qué crees que es lo importante en un grafo, las relaciones entre los nodos, su representación geométrica,…?

Cuando dos vértices o nodos están unidos por una arista, se dice que son vecinos o adyacentes. El número de vértices vecinos de un vértice concreto lo llamamos grado de ese vértice. Por ejemplo, el grado de Guadalajara es 1 y el de Cuenca 4

Elena, Héctor, Amín, Mihai, Lucía, Yan y Sergio están apuntados en estas actividades del PIEE:

***TENIS DE MESA:** Yan y Mihai

***AJEDREZ**: Lucía, Yan y Elena

***FOTOGRAFÍA**: Amín, Sergio y Yan

***TEATRO:** Sergio, Mihai y Héctor

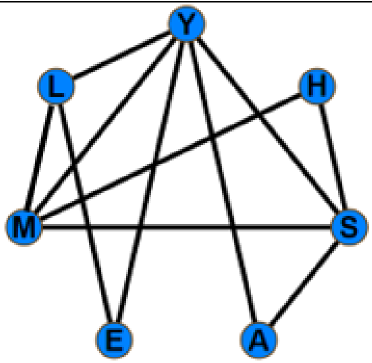
***INGLÉS**: Mihai y Lucía

Representa el grafo de estos alumno, piensa primero como se relacionan los alumnos:

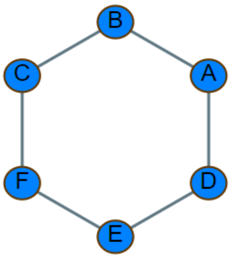
Los vértices son:___________*los alumnos*____

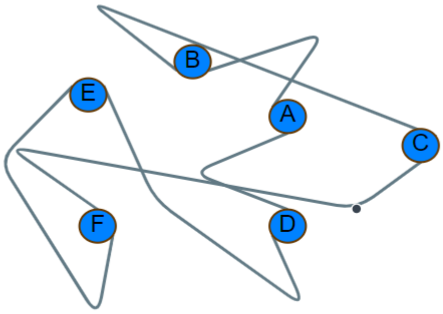
Dos vértices están conectados por una arista si:_____*están apuntados a la misma actividad*__

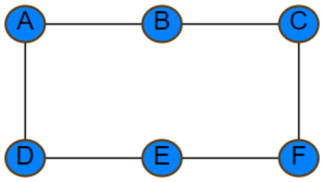
Escribe al lado de cada vértice su grado. Compara de nuevo tu grafo con el que han hecho varios de tus compañeros. ¿Son iguales geometricamente? Si no son iguales, ¿crees que representan la misma información tu grafo y el de tus compañeros?

	*Aunque el dibujo no sea el mismo, los vértices y como se relacionan entre ellos mediante las aristas son iguales que es lo realmente importante a la hora de representar un grafo.*

Observa los siguientes grafos, ¿qué puedes decir de ellos?

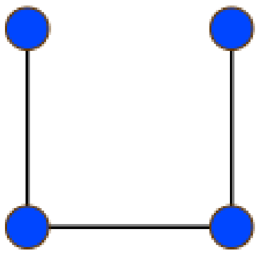
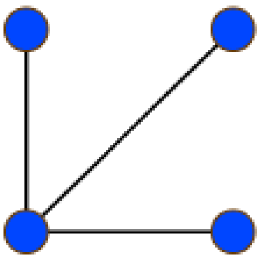




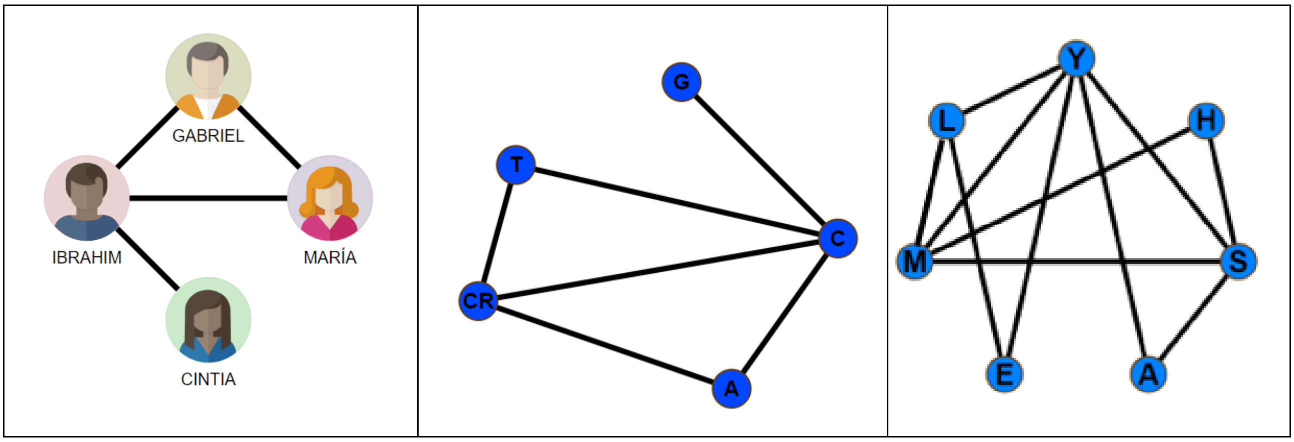


Como ya habrás intuido, los grafos nos dan la información de las conexiones entre sus vértices, no importa como dibujemos geométricamente estas conexiones. **Dos grafos que tienen el mismo número de vértices, si las conexiones entre los vértices son las mismas, decimos que son isomorfos y por lo tanto representan la misma información.**

¿Puede haber dos grafos diferentes, es decir, no isomorfos, con el mismo número de vértices y de aristas? Justifica tu respuesta.

Aquí **mostramos dos grafos que tienen el mismo número de vértices y de aristas pero no son isomorfos** ya que los grados de los vértices son diferentes.
 

1.1 PRIMERAS PROPIEDADES DE LOS GRAFOS Y SUS APLICACIONES



Vamos a descubrir algunas propiedades de los grafos y como las podemos utilizar, completa las siguientes tablas con los datos de los grafos.

GRAFO PERSONAS

VÉRTICE	Gabriel	Ibrahim	María	Cintia
GRADO	*2*	*3*	*2*	*1*

GRAFO CASTILLA-LA MANCHA

VÉRTICE	Guadalajara	Cuenca	Albacete	Ciudad Real	Toledo
GRADO	*1*	*4*	*2*	*3*	*2*

GRAFO PIEE

VÉRTICE	Lucía	Yan	Mihai	Elena	Héctor	Sergio	Amín
GRADO	*3*	*5*	*4*	*2*	*2*	*4*	*2*

En el **grafo de personas**, **¿Observas alguna relación entre el grado de los vértices y el número de aristas?** ¿**y en el grafo de Castilla-La Mancha o en el grafo del PIEE**? Si encuentras alguna relación comprueba si se cumple en los tres grafos.

Completa la siguiente tabla y enuncia la propiedad que se cumple entre el número de aristas y la suma del grado de los vértices.

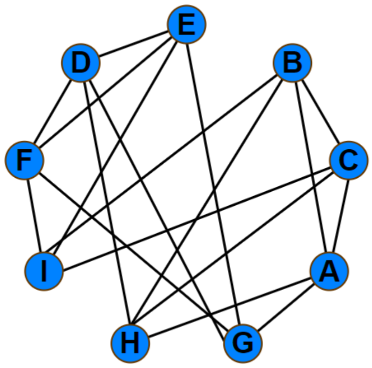
	Nº DE VÉRTICES	SUMA GRADOS VERTICES	NÚMERO DE ARISTAS
GRAFO PERSONAS	*4*	*8*	*4*
GRAFO MAPA	*5*	*12*	*6*
GRAFO PIEE	*7*	*22*	*11*

Propiedad: En un grafo, la suma de los grados de los vértices es el doble de su número de aristas.

Al resultado obtenido se le conoce como **el primer teorema de la historia en Teoría de Grafos.**

Teorema de Euler: La suma de los grados de todos los vértices de un grafo es el doble de su número de aristas. La demostración es sencilla, dado que cuando sumamos los grados de cada vértice, cada arista la hemos contando dos veces. Fíjate que la suma de los grados de un grafo siempre será un número par.
¿Cómo será el número de vértices de un grafo que tengan grado impar?

En una fiesta hay 9 personas. ¿Puede cada persona conocer exactamente a otras 4 personas? ¿y a tres personas? *(Problema adaptado del libro Revuela-Ed.SM)*



Cada persona puede conocer a 4 personas, podemos ver una opción en el grafo de ejemplo.
Pero cada persona no puede conocer a 3 personas ya que entonces, cada vértice (persona) tendría grado 3 y por lo tanto la suma de los grados sería 27, pero acabamos de ver que la suma de los grados no puede ser impar, por lo tanto no es posible que cada persona conozca exactamente a otras 3 personas.

Los miembros de un grupo de 15 amigos quieren organizar un torneo de ping pong en el que cada persona se enfrente a otras 5 del grupo. ¿Puede organizarse este torneo?

No va a ser posible organizarlo, si cada persona se enfrenta con otras 5 del grupo quiere decir que si dibujasemos el grafo, cada vértice (persona) tendría grado 5. La suma de grados sería impar, 5x11=55 y esto no es posible

Piensa en un grupo de 7 personas que se reunen, escoge una de ellas, **¿como mínimo a cuantas personas les saludará con un apretón de manos? ¿Y como máximo?**

Para cualquier grafo de n vértices, al escoger un vértice v cualquiera, **se tiene 0 ≤Grado(v)≤ n-1**

Imagina ahora que en esa reunión de 7 personas, ha habido una persona que no ha saludado a nadie, entonces **¿puede ser que haya una persona que haya saludado a las otras 6? ¿Cómo máximo a cuantas personas habra saludado?**

Termina de escribir la siguiente propiedad:

En general para un grafo de n vértices, si hay un vértice de grado cero entonces el resto de vértices tendrán grado menor que___ ***n-1***_________

Y si en la reunión ha habido una persona que ha saludado a las otras 6, podemos sacar alguna conclusión similar a la anterior para el resto de los vértices. Escríbela en el siguiente recuadro:

En general para un grafo de n vértices, si hay un vértice de grado n-1 entonces el resto de vértices tendrán grado mayor que 0, no puede haber un vértice con grado 0.

Podemos deducir una última propiedad aplicando una herramienta matemática muy potente que se conoce como el PRINCIPIO DEL PALOMAR que dice lo siguiente ***si hay más palomas que palomares, alguno de los palomares deberá contener por lo menos dos palomas.***

Vamos a aplicarlo a nuestra reunión de 7 personas, si estamos en el caso en que una persona no ha saludado a nadie, los grados de las 7 personas solo pueden ser uno de estos {0,1,2,3,4,5}, en definitiva tenemos 7 palomas, (personas o vértices del grafo) y 6 palomares (los palomares son los grados de los vértices), con lo que se puede deducir que: (**escoge una de estas tres opciones**):

***Hay al menos dos vértices con el mismo grado** (hay dos personas que han saludado al mismo nº de personas) ☺

***Todos los vértices tienen distintos grados** (todas las personas han saludado a un numero diferente de personas)

***No se puede deducir nada porque nos faltan datos**, podría darse cualquier combinación de saludos.

Y si estamos en el caso en que una persona ha saludado exactamente a 6 personas, ¿sigue siendo válida tu respuesta? Justifícalo

Si una persona ha saludado a 6 personas, los grados de las 7 personas son {1,2,3,4,5,6}, tenemos 7 palomas, personas y 6 palomares(grados de los vértices) por lo que dos palomas han de meterse en el mismo palomar, es decir dos personas deben tener el mismo grado.

Formalizamos esta nueva propiedad: **en todo grafo siempre hay por lo menos dos vértices con el mismo grado.**

Por su cumpleaños, Julen ha invitado a muchos de sus amigos. Algunos se conocían ya de antes y otros no. Demuestra, que, independientemente de la cantidad de personas que acuden a la fiesta, hay al menos dos que conocen a exactamente el mismo número de personas.

Aplicando el principio del palomar, supongamos que ha invitado a n amigos, o bien los grados de los vértices son {1,2,3,4,5,…, n-1}, o bien son {0,1,2,3,4,5,…, n-2}, en cualquier caso son n-1 grados diferentes a repartir entre n personas, al menos dos tienen que tener el mismo grado aplicando el principio del palomar.

1.2RECORRIENDO UN GRAFO: CAMINOS Y CICLOS

Imagen recuperada de https://www.enterat.com/

Una empresa de transporte con sede en Sevilla, opera solo en las provincias de Andalucia. Representa mediante un grafo las **conexiones por carretera** que hay entre estas 8 ciudades.

Describe la ruta que realizarias para ir de Almería a Huelva (utiliza flechas entre las iniciales de cada ciudad por la que vayas pasando,por ejemplo si pasas de Sevilla a Córdoba, S →C).

A →G→ S →H

Compara la ruta que ha hecho tu compañero, si son diferentes pensad si ambas son válidas y si son iguales buscad otra diferente. **En un grafo, este tipo de ruta que une dos vértices distintos del grafo se llama camino.**

Muchos problemas de la vida real se representan con grafos en los que nos interesa saber si al escoger dos vértices cualesquiera, hay un camino que los une.

Un grafo se dice **conexo** si al escoger dos vértices cualesquiera están conectados por un camino.

La empresa ha decidido asignar rutas a cada transportista, de modo que salgan de Sevilla, pasen una única vez por cada ciudad y regresen a la sede. Busca dos posibles rutas y escríbelas. Imagina que quieres hacer una de estas rutas pasando por Huelva, **¿es posible?** **A este tipo de rutas que comienzan y terminan en un mismo nodo y todos los vértices y aristas son diferentes, se llama ciclo.**

Si escogemos dos vértices cualesquiera de un grafo conexo. ¿siempre podremos encontrar un ciclo?

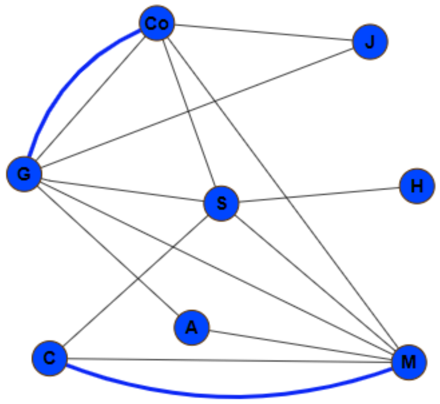
Depende del grafo, por ejemplo entre Huelva y cualquier otra ciudad nunca vamos a poder encontrar un ciclo.

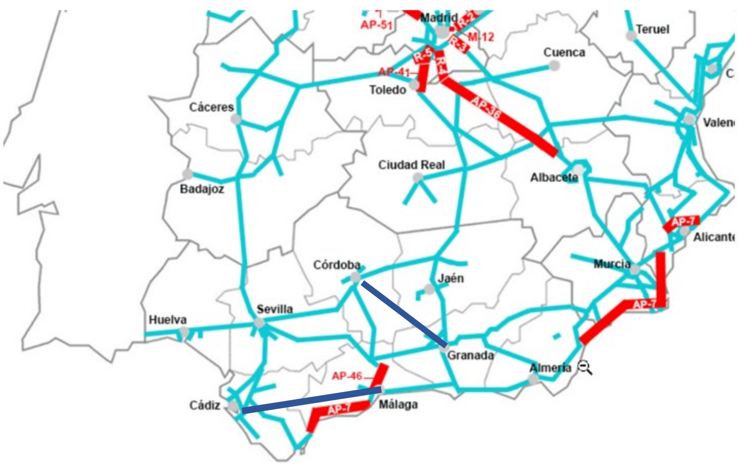
Imagina que la empresa quiere ampliar su negocio y quiere transportar mercancias a Ceuta. Como quedaría representada inicialmente Ceuta en el grafo. **Este tipo de nodos que no están conectados con ningún otro se llaman aislados.**

Si un grafo tiene un nodo aislado ¿Puede ser conexo?

Evidentemente no, ya que nunca podremos encontrar una camino que llegue hasta ese nodo

Imagina que se hacen nuevas carreteras y el grafo de la empresa queda como en la siguiente imagen. **Traza en el mapa las nuevas carreteras que se han creado.**





Un multigrafo es aquel en el que hay al menos dos vértices conectados por dos o más aristas.

Pon un ejemplo de situación que se represente con un multigrafo.

Si entre el alumnado de la clase decides representar la relación “calzar el mismo número de pie”. ¿Qué tipo de grafo es? Pon otro ejemplo de situación que se modelice con este tipo de grafos.

Al ser características disjuntas, una persona no puede calzar el 36 y el 37 a la vez, el grafo va a ser NO conexo. Ejemplos: Personas que tengan el mismo color de ojos, mismo nº de hermanos…

1.3 TIPOS DE GRAFOS: GRAFOS DIRIGIDOS Y GRAFOS PONDERADOS

Visualiza el video "El espejismo de la mayoría"

Las relaciones entre personas que participan en redes sociales también pueden representarse mediante grafos. De hecho hay un gran volumén de información y muchas empresas e instituciones tienen un gran interés en analizar esta información **y precisamente la teoría de grafos les ayuda a analizarla.**

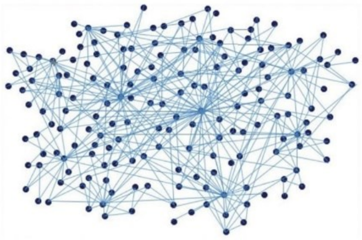
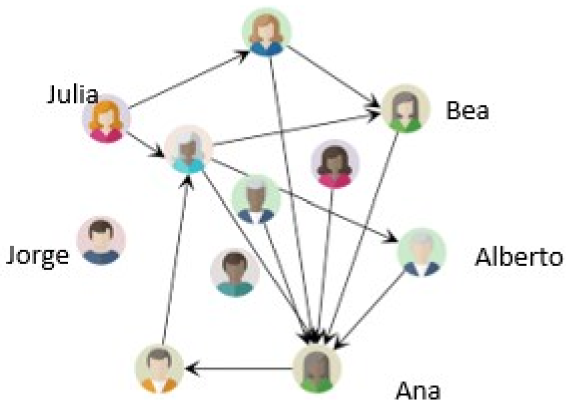


Imagen recuperada de https://opensistemas.com/

Hasta ahora hemos representado relaciones que son recíprocas, por ejemplo las ciudades de Andalucia estaban relacionadas por una carretera de doble sentido, o si una persona A trabaja con otra persona B, eso quiere decir que B trabaja con A.

Pero no siempre la relación es recíproca un elemento de un conjunto puede estar relacionado con otro pero no a la inversa. **Vamos a analizar las relaciones en Instagram o en Twitter. ¿Son recíprocas?**

No son recíprocas, si observamos, la relación "seguir a" no es recíproca, podemos seguir a una persona y esa persona no seguirnos o a la inversa



¿Quién es la persona más influencer?
Ana

¿Hay alguna persona que siga a alguien pero no tiene seguidores?
Julia
¿A cuantas personas sigue Bea?
A una

¿Qué tiene de especial Jorge en esta red?
Es un nodo aislado

En muchas situaciones nos interesa reflejar la importancia o la intensidad de las relaciones. Para poder representar esta intensidad se asigna a las aristas una etiqueta o peso. **Estos grafos se llaman ponderados.** Un ejemplo de grafo ponderado es una red de ciudades donde los enlaces representan las rutas de transporte y el peso representa la distancia entre ciudades. Más adelante estudiaremos este tipo de grafos ya que resuelven muchos problemas de rutas de transporte óptimas

Imagen recuperada de https://cienciadedatos.net/

2. FAMILIAS DE GRAFOS

2.1 GRAFO CICLO, GRAFO CAMINO, GRAFOS COMPLETOS Y GRAFOS BIPARTITOS

Vamos a conocer grafos que por sus características presentan ciertas regularidades y patrones

GRAFO CAMINO (Path): es un grafo cuyos vértices forman un camino, es decir una sucesión de vértices y aristas (sin vértices repetidos). Se denotan así, P_n , donde n es el número de vértices.

Dibuja el grafo P_6 y escribe una situación de la vida real que se modelice con un grafo P_6

GRAFO CICLO: sus vértices y aristas forman un ciclo. Se dentoan así, C_n donde n es el número de vértices.

Dibuja el grafo C_5 y escribe una situación de la vida real que se modelice con un C_5

GRAFO COMPLETO: en ellos cualquier vértice está unido a todos los demás, se denotan por Kn.

Dibuja el grafo K_4 y escribe una situación de la vida real que se modelice con un K_4

GRAFO REGULAR: es un grafo cuyos vértices tienen todos el mismo grado.

Dibuja un grafo regular de 5 vértices cuyo grado sea 3 y otro de 7 vértices con grado 5

No es posible ya que la suma de gados sería 15 y 35 respectivamente y sabemos que no puede ser.

Supongamos que asistes a una reunión de 5 personas, de modo **que todas las personas saludan a todas las personas.** Representa la situación con un grafo. ¿A cuantas personas saluda cada miembro de la reunión? ¿Cuántos saludos se han realizado en total? Ordena los distintos saludos que da cada persona, ten cuidado de no contabilizarlos dos veces. ¿Puedes encontrar una fórmula para calcular 1+2+3+4+5 sin tener que sumar los términos?. ¿Y para 1+2+…+n?

*Cada persona saluda a 4 personas pero en total se han producido (5*4)/2 =10 saludos.*

P1 saluda a P2,P3,P4 y P5

P2 saluda a ~~P2~~,P3,P4 y P5

P3 saluda a ~~P2,P3~~,P4 y P5

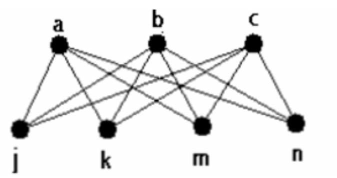
P4 saluda a ~~P2,P3,P4~~ y P5

*1+2+3+4=(5*4)/2*

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

El equipo de tenis "Reds" tiene tres jugadoras: Mery, Carla y Simone . El equipo "Cats" tiene cuatro: Jeny, Adele, Rose y Emily. Cada jugadora del equipo de las Reds debe jugar con cada jugadora del equipo contrario. Representa mediante un grafo cada uno de los partidos que van a jugarse. ¿Cuántos partidos se habrán jugado?¿Qué tiene de especial este grafo con respecto a los otros?

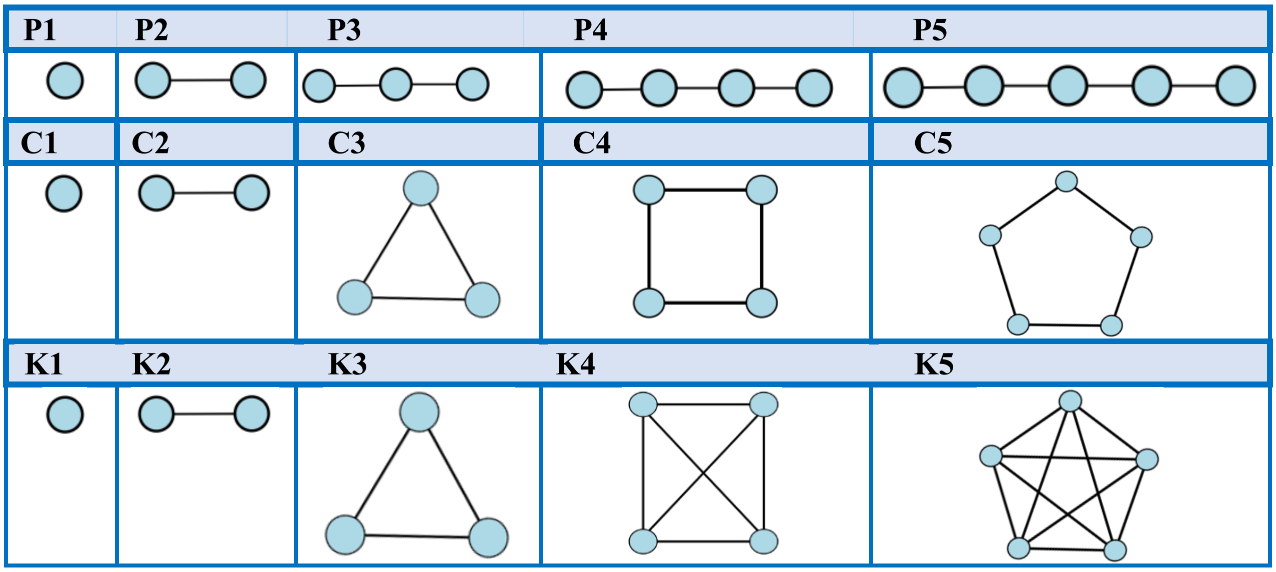
Se jugarán 3x4=12 partidos



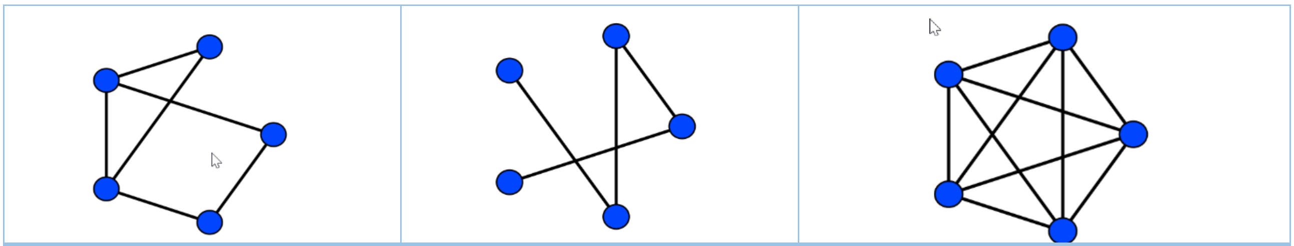
En este tipo de grafos en que **los vértices están divididos en dos subconjuntos de forma que vértices del mismo subconjunto no están relacionados, se llaman grafos bipartitos**. Si además se cumple que cada vértice del primer subconjunto está relacionado con todos los vértices del segundo subconjunto, **se denota $K_{n,m}$ y se llama bipartito completo.**

Completa la siguiente tabla:

	Nº de vértices	Grado de cada vértice	Suma de grados
Grafo P_n	*n*	*2 (excepto 1º y ult)*	*2(n-2) +2*
Grafo C_n	*n*	*2*	*2n*
Grafo K_n	*n*	*n-1*	*n.(n-1)*
Grafo $K_{n,m}$	*n+m*	*n y m*	*n*m*



Los grafos completos nos pueden ayudar a resolver situaciones de conflicto o incompatibilidad, para ello utilizaremos un nuevo concepto. Dos grafos, simples, se dicen complementarios si tienen los mismos vértices, no tienen ninguna arista en común y superponiendo ambos se formaría el grafo completo. **Por lo tanto, ¿si dos vértices son adyacentes en su grafo, lo serán en el complementario?**

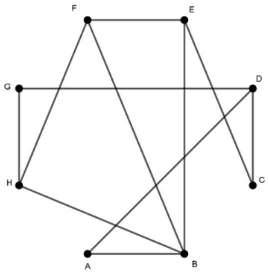


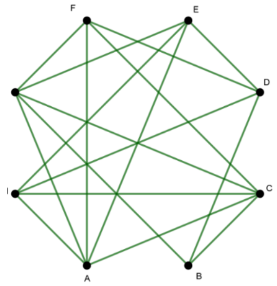
Grafo G	Complementario de G	Grafo k5

Piensa como los grafos complementarios pueden ayudarte a resolver este problema:

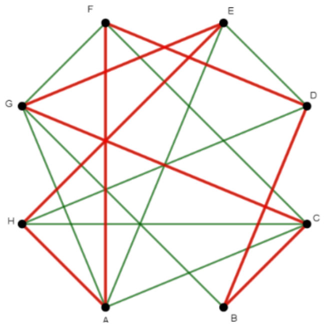
Alba, Beatriz, Carlos, Diana, Ernesto, Fernando, Gabriel y Miriam tienen que sentarse juntos en una mesa circular para una reunión de empresas. No obstante, cada uno de ellos no puede sentarse con algunos de los demás por que sus empresas son muy diferentes. Así, Alba no puede sentarse junto a Beatriz ni junto a Diana; Beatriz no puede sentarte junto a Alba, Ernesto, Fernando ni Miriam; Carlos no se va a sentar junto a Diana ni Ernesto; Diana no puede sentarse junto a Alba, Carlos y Gabriel; Ernesto no puede junto a Beatriz, Carlos ni Fernando; Fernando junto a Beatriz, Ernesto o Miriam; Gabriel no puede con Diana ni Miriam; y, por último, Miriam no quiere sentarse junto a Alba, Fernando ni Gabriel.¿Hay alguna distribución en la mesa para que todos tengan a su lado a personas afines? ¿Sabrías encontrarla?

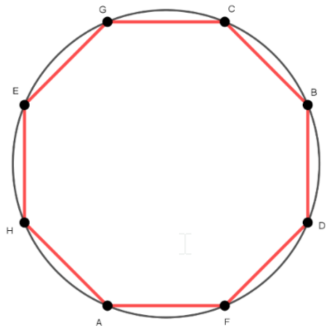
Si escogiesemos una estrategia que comprobase cada una de las opciones posibles, llevaría mucho tiempo ya que hay $\frac{8!}{8} = 5.040$ *posibles posiciones.*
Representamos el grafo de las personas, de tal forma que dos están relacionadas si no pueden sentarse juntas, si ponemos el complementario, las aristas representan ahora la relación "poder sentarse juntas"y hemos encontrado todas las posibles opciones de personas que pueden sentarse juntas.





Ahora ya podemos buscar un ciclo, que nos dará el orden en la mesa circular recorriendo las aristas permitidas, este podría se un ejemplo.



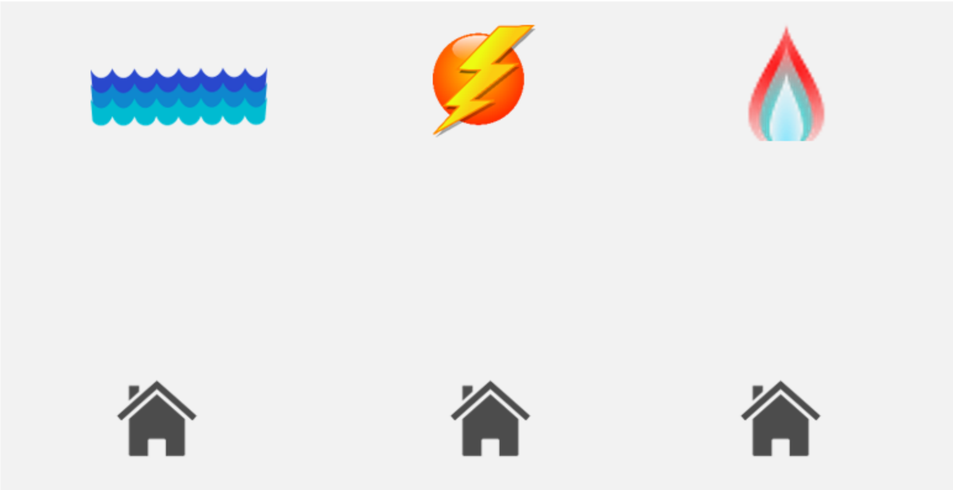


Problema recuperado de https://uvadoc.uva.es/handle/10324/38508

2.2 GRAFOS PLANOS

Ya sabemos que lo que define un grafo no es su forma geométrica, sino que lo relevante es su número de vértices y cómo se relacionan. Pero también es cierto que **los grafos nos ayudan a representar situaciones reales y según el tipo de situación que queramos estudiar nos interesará la forma en la que está dibujado el grafo.** Supón que queremos dibujar un grafo que represente los cables de un circuito electrónico**, no podrían cruzarse ya que se produciría un cortocircuito**.

Imagina que en un pequeño pueblo hay tres casas y tres compañias de servicios públicos que abastecen de agua, electricidad y gas. Tenemos que conectar cada uno de las casas a cada una de las plantas de servicios públicos, pero debido al diseño del pueblo, no se permite cruzar las diferentes tuberías y cables. Intenta conectar las compañias con las casas sin que las líneas se junten.

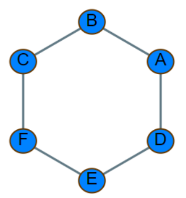


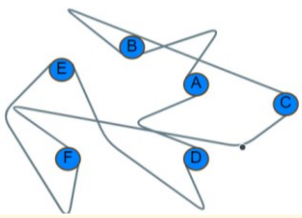
Has conseguido resolverlo? Has encontrado al menos una solución en la que solo se cruce una línea?A qué familia de grafos pertenece? Escribe su nombre.

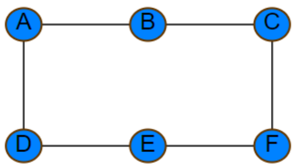
Tras muchos intentos no se encontra una solución, eso no quiere decir que no la haya. Como mucho se puede encontrar una en la que solo se cruce una arista. Es el grafo bipartito $K_{3,3}$

Diremos que **un grafo es plano**, cuando tenga una representación sin cruces de **aristas**.

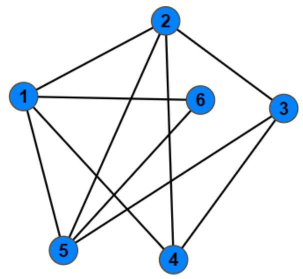
Que un grafo sea plano, no quiere decir que no tenga una representación con cruces de aristas, recuerda este ejemplo en el que los tres son el mismo grafo.

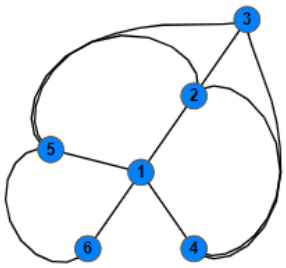






¿Puedes reorganizar los vértices de este grafo para que ninguna arista se cruce, es decir, puedes comprobar que el siguiente grafo es plano?. Si quieres puedes utilizar este sofwtare https://g.ivank.net/ (desmarca la opción physics del lateral derecho)





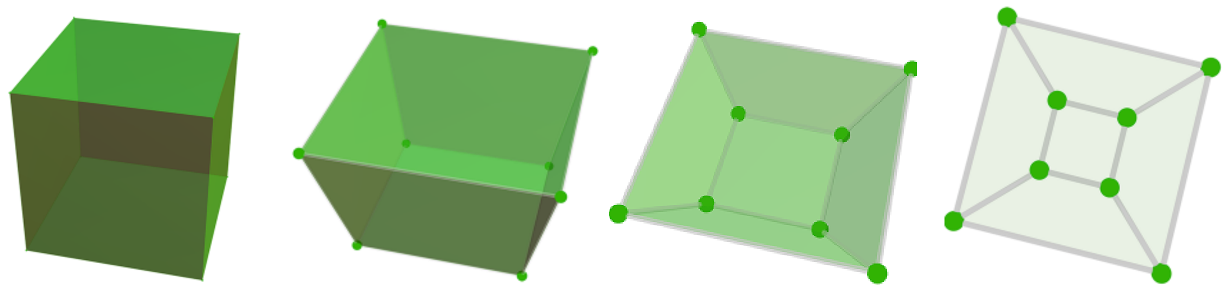
Aquí tenemos una posible solución sin cruces de aristas.

¿Crees que cualquier grafo es plano? ¿Hemos visto hasta ahora algún ejemplo de grafo que no sea plano?

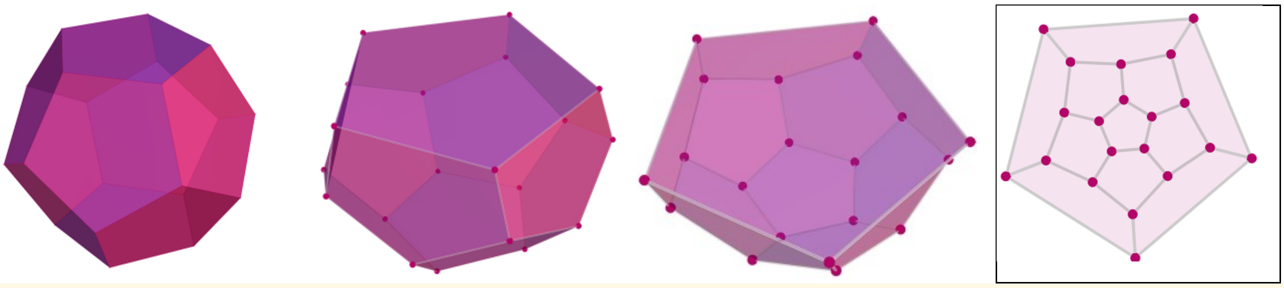
De momento hemos visto que el grafo $K_{3,3}$ parece que no es plano

Vamos a ver algunas aplicaciones de los grafos planos.

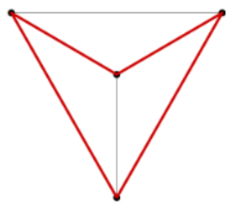
A cualquier poliedro le corresponde un grafo plano conexo. Así, dado un poliedro cualquiera, podemos deformar sus aristas hasta transformarlo en un grafo plano. Imagina que el cubo tiene lados elásticos, y se va transformando al ir estirando de los 4 puntos de la cara superior hasta dejarlo plano, **la cara superior del cubo es como si se hubiese transformado en el exterior del grafo.** Las caras del poliedro pasan a ser las regiones del grafo menos una pero la asociamos con la región exterior que rodea a el grafo.



Termina de transformar el dodecaedro en un grafo.



¿Sabrías deformar de forma similar el tetraedro en un grafo? (Recuerda que debes "estirar" de los tres vértices de la cara superior)



Dibuja dos grafos planos más, los que tú quieras y completa la siguiente tabla:

	REGIONES	VÉRTICES	ARISTAS
TETRAEDRO	4	4	6
CUBO	6	8	12
DODECAEDRO	12	20	30
GRAFO 1	4	6	8
GRAFO 2	6	6	10

¿Puedes **conjeturar una fórmula para los grafos planos que relacione las regiones, vértices y aristas**?

Completa el siguiente cuadro

Esta propiedad que has descubierto se llama **Fórmula de Euler** y su enunciado sería este:

Para todo grafo plano y conexo con R regiones, A aristas y V vértices se cumple que:

________ ***R+V=A+2***______________

Como hemos comentado al principio, a todo poliedro le corresponde un grafo plano, por lo que la **Fórmula de Euler es válida para poliedros**, quedando enunciada de esta manera:

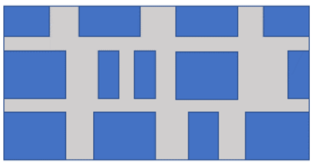
Para todo poliedro convexo con C caras, A aristas y V vértices se cumple que

__________ **C+V=A+2**_________________

Recuerda que realmente no la has demostrado, sino que has hecho una conjetura, para demostrarla hay que probar que se cumple para cualquier grafo y en este caso solo lo hemos comprobado para 5 grafos planos..

Euler fue uno de los matemáticos más prolíficos de la historia, en 1750 descubrió esta relación entre las caras, vértices y aristas de los poliedros, pero nunca fue capaz de dar una demostración correcta de este resultado, aunque se acercó mucho. En este apartado **hemos comprobado que la fórmula de Euler se cumple para esos 5 grafos planos, no hemos dado una demostración general pero es bastante sencilla, aunque no la vamos a tratar aquí.** Y por tanto **los grafos nos han ayudado a probar una de las fórmulas más famosas y utilizadas de la geometría en el espacio.**

En un barrio de la ciudad se ha decidido colocar una placa fotovoltaica en cada una de las manzanas del barrio. En total el barrio tiene 130 calles que se cruzan en 85 intersecciones. ¿Cuántas placas solares se van a colocar?



*Si nos fijamos en un plano cualquiera podríamos transformarlo en un grafo plano donde las intersecciones son los vértices, las calles las aristas y las regiones del grafo serían las manzanas o bloques azules de la imagen (recuerda que hay una región exterior en el grafo. =A+2 C+85=130+2 C=132-85=52 (hay que quitar una región exterior). **Por lo tanto hay 51 placas solares***

Conocer si un grafo es plano no, es un problema ampliamente estudiado en las matemáticas discretas ya que nos puede ayudar a resolver situaciones y problemas en los que es crucial saber si hay un modelo de grafo en el que las aristas no se corten.

Por ejemplo el problema de las las compañias de suministros, problemas de circuitos electrónicos donde los cables no pueden cortarse…

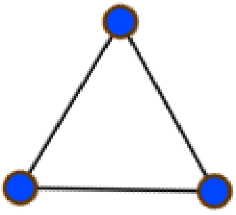
Una forma de saber si un grafo NO es plano es utilizar el test de planaridad siguiente:

Si **G es un grafo conexo y plano** con A aristas y V vértices, entonces **A≤3V-6**

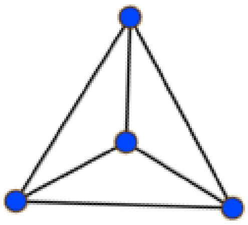
Esta propiedad solo se puede utilizar para comprobar que un grafo no es plano. Si un grafo G no cumple la propiedad **A≤3V-6** entonces no puede ser plano, ya que si lo fuera tendría que cumplirla.

Por otra parte, que un grafo cumpla que A≤3V-6, no quiere decir que sea plano. Puede que lo sea o no.

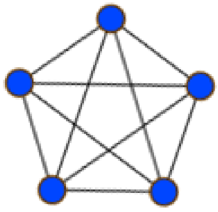
Comprueba si K3, K4 y K5 son grafos planos o no lo son, escribe debajo de cada grafo si son o no planos.



K3 __PLANO___



__K4 __PLANO_



K5 __NO PLANO__

Claramente K1, K2,K3 y K4 son planos ya que hay una represetación de ellos sin cruces de aristas.

*K5 se puede intentar buscar una representación, pero tras muchos intentos podemos empezar a pensar que igual no es plano. Es el momento de probar si cumple el test de planaridad. Si K5 fuese plano entonces debe cumplir que **A≤3V-6***

K5 A=10 y V= 5 Tenemos que 3V-6=15-6=9 y 9 no es mayor que 10, por lo tanto K5 no es plano

Si K5 no es plano, ¿qué podemos decir sobre la planaridad K6, K7,… y en general de Kn con n≥5?

Si K5 no es plano, K6, K7,... no pueden ser planos. Imagina por ejemplo que K6 fuese plano, eso querria decir que se podríamos representarlo sin cruces de aristas, si le quitasemos un vértice evidentemente el subgrafo que quedase tampoco tendría cruces de aristas. Pero precisamente si a K6 le quitamos un vértice el grafo resultante es K5 y ya sabemos que no es plano. El mismo argumento valdría para K7, K8,...ya que todos ellos tienen a K5 como subgrafo y ya sabemos que K5 no puede representarse sin cruces de aristas

Si recuerdas el problema inicial de los suministros de las tres compañias, no hemos conseguido encontrar una solución.**La resolución de este problema, si lo modelizamos como un grafo se reduce a saber si el grafo bipartito $K_{3,3}$ es plano.** Aunque ya intuimos que no lo es después de múltiples intentos, hay que demostrarlo de forma general.

Comprueba si $K_{3,3}$ cumple el test de planaridad.

$K_{3,3}$ tiene 6 vértices y 3x3=9 aristas 3V-6=12, como 9<12 cumple el test, pero eso no quiere decir que sea plano, de heho antes no hemos sido capaces de resolver el problema de los suministros.

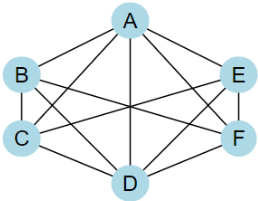
Aunque no lo vamos a probar, **efectivamente $K_{3,3}$ NO es un grafo plano.**

Hemos visto que $K_{3,3}$ y K_5 no son planos. Imagina un grafo G que tenga como subgrafo a uno los dos. **¿puede ser G plano?**

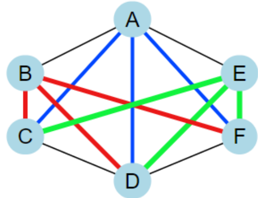
Claramente no podrá ser plano, si lo fuera podríamos representarlo sin cruces de aristas y por lo tanto cualquier subrafo que escogiesemos no tendría cruces de aristas, en concreto o bien K_5 o $K_{3,3}$ y acabamos de ver que ambos no son planos.

En 1930 el matemático polaco Kazimierz Kuratowski demostró cómo podiamos saber si un grafo era plano o no.
Kuratowski demostró que si en un grafo G, el número de vértices con grado mayor o igual que 4 es menor que 5 y el número de vértices con grado mayor o igual que 3 es menor que 6, **entonces el grafo es plano**. **De forma coloquial diremos si un grafo no "esconde" un K_5 ni un $K_{3,3}$.** entonces es plano.
Podemos ver este resultado de otro modo, **si un grafo no es plano**, entonces tiene al menos 5 vértices con grado mayor o igual que 4 o tiene al menos 6 vértices con grado mayor o igual que 3.

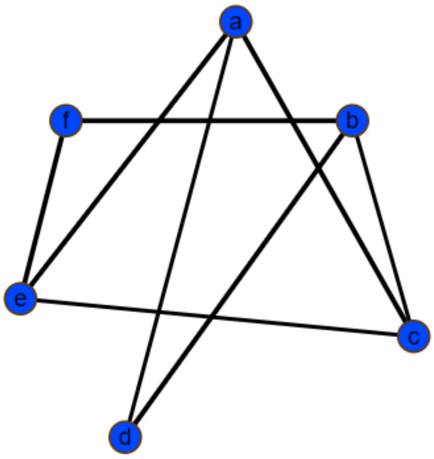
El siguiente grafo no es plano, esconde un subgrafo $K_{3,3}$. Encuéntralo y dibújalo.

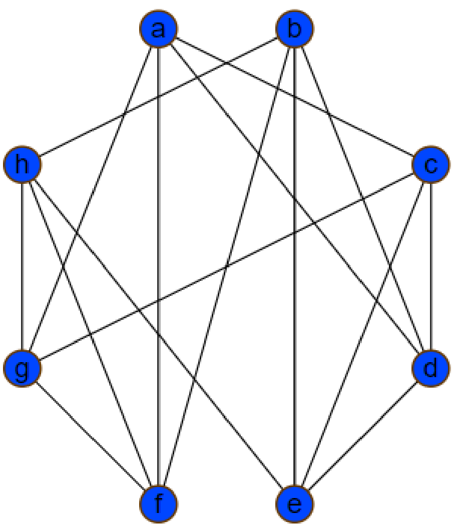


Se trata de buscar dos subconjuntos disjuntos de tres vértices que estén relacionados entre sí 3 a 3.

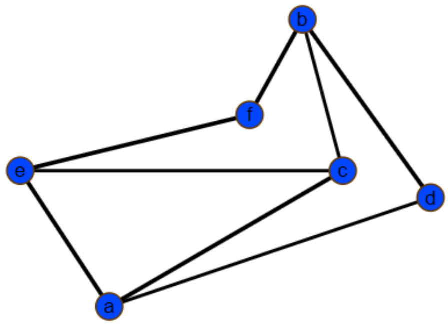


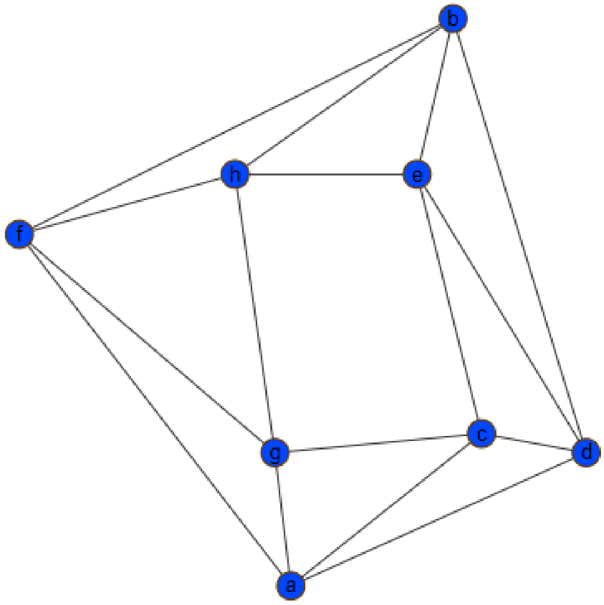
Comprueba que los siguientes grafos son planos ya sea porque lo puedes demostrar aplicando alguna de las propiedades vistas para grafos o bien porque puedes encontrar una representación plana. *(Problema recuperado de Revuela-1º Bachillerato Matemáticas Generales-Ed. SM)*





Ambos son planos, en el 1º podemos aplicar la condición suficiente de Kuratwski para grafos planos.
El 2º aunque tiene más de 5 vertices de grado ≥4, no olvidemos que es una condición necesaria para los grafos no planares, pero no es suficiente, y el segundo grafo es un ejemplo de ello, no cumple la condición pero hemos encontrado una representación plana.



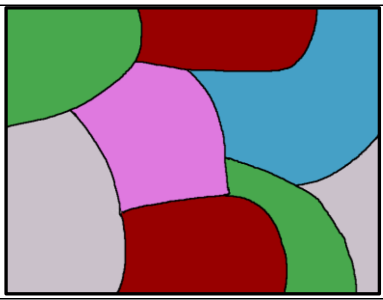


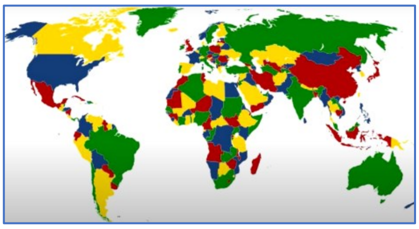
2.3 GRAFOS PLANOS, COLORACIÓN DE MAPAS Y SOLUCIÓN DE INCOMPATIBILIDADES

Colorea el mapa de Italia **tratando de utilizar el menor número de colores posible** (pon a cada región las letras **R** (rojo), **V**(Verde), **A**(amarillo), … Anota la estrategia que has seguido. ¿Cuantos colores has necesitado? Pregunta a tus compañeros cuantos han utilizado y qué estrategia han seguido.

Imagen recuperada de https://mapamundi.online/

El siguiente mapa inventado está coloreado con cinco colores, haz una copia en la cuadrícula al lado y **trata de colorearlo con el menor número de colores posible**.¿Cuantos has utilizado? ¿Cual crees que es el mínimo número de colores para colorear cualquier mapa, real o inventado?. Compara tu conjetura con la de tus compañeros, comprueba si funciona otros mapas que encuentres en Internet de otros paises.





Visualiza el video El teorema de los cuatro colores"

El problema de los 4 colores y su demostración son muy famosos no solo por sus aplicaciones, también porque **fue el primer Teorema donde se involucró a un ordenador en su demostración.**

La conjetura de que cualquier mapa podía ser coloreado con solo cuatro colores apareció por primera vez en una carta de **Augustus De Morgan**, profesor de matemáticas en el University College London, a su amigo William Hamilton, famoso matemático irlandés, en 1852. Frederik Guthrie era estudiante de De Morgan y le sugirió esta idea en nombre de su hermano Francis Guthrie. La conjetura de los 4 colores fue demostrada en 1976, en la Universidad de Illinois, por K. Appel y W. Haken ayudándose de un ordenador lo que ocasionó un gran revuelo y polémica entre la comunidad matemática.

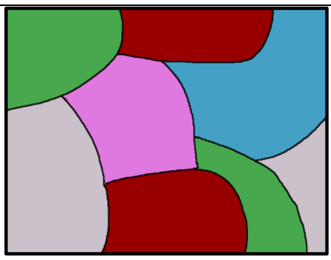
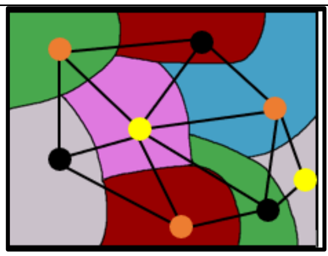
Teorema de los 4 colores

Todo mapa geográfico plano se puede colorear utilizando como máximo cuatro colores distintos de modo que no haya regiones que compartan frontera con el mismo color **(si dos o más regiones comparten solo un punto se considera que NO comparten frontera)**

Si modelizamos el problema de la coloración de mapas con grafos, **¿qué serán los vértices y que relación hay entre los vértices?**

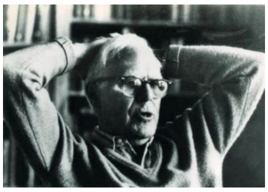
Vemos que un mapa se puede representar utilizando un grafo, cada vértice es una región y las aristas representan la relación compartir frontera, así, uniremos dos vértices si las regiones que representan comparten frontera. Por tanto estudiar la coloración de mapas es equivalente a estudiar la coloración de grafos, que de momento nos va a llevar menos tiempo y además podemos ayudarnos de las propiedades que conocemos de los grafos.

Dibuja sobre el propio mapa inventado de la figura su grafo correspondiente y colorea los vértices del grafo utilizando el menor número de colores posible.

		*El mapa puede colorearse con tres colores. Si dibujamos el grafo sobre el mapa y después lo coloreamos de modo que dos vértices adyacentes no tengan el mismo color, vemos que bastan 3 colores para colorear el mapa.*

El Teorema de los 4 colores para grafos se enuncia de la siguiente manera:

Todo **grafo plano** se puede colorear utilizando como máximo 4 colores de tal forma que no existen dos vértices adyacentes que tengan el mismo color.



En 1975, el científico Martin Gardner publicó un artículo en el que afirmaba que el siguiente mapa de 110 regiones, necesitaba al menos 5 colores, contradiciendo el Teorema de los 4 colores. Muchos lectores le escribieron afirmando que sí era posible colorearlo con 4 colores, dándole varias soluciones. **El artículo lo publicó Gardner el 1 de abril, día de los inocentes en los paises anglosajones.**

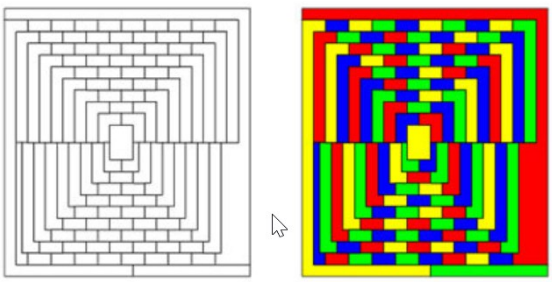


Imagen recuperada de https://culturacientifica.com/

En todo caso, el mapa propuesto por Gardner tenía 110 regiones, por lo que **el problema de la coloración de grafos puede complicarse mucho si no seguimos una estrategia adecuada**.

¿Hay algún método para colorear un grafo de forma óptima? ¿Y para encontrar el mínimo número de colores que necesita para ser coloreado? **En general no hay ningún método o algoritmo eficiente que nos permita colorear un mapa o grafo con el menor número de colores posible**.

Para colorear un grafo plano, se construye una coloración con un algoritmo, pero eso no quiere decir que sea la óptima. Una vez encontrada una solución intentaremos reducir el número de colores o bien demostraremos que es imposible reducir el número de colores. Uno de los algoritmos más utilizados en coloración de mapas es el siguiente:

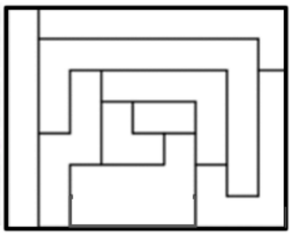
Algoritmo Welsh Powell de coloración de grafos:

Paso 1: Ordena los vértices en una tabla en orden decreciente de su grado y ordena los colores que vayas a utilizar (etiquétalos con números naturales, por ejemplo 1 rojo, 2 verde, 3 azul, ….)

Paso 2: Pinta el primer vértice no coloreado de tu lista con el menor color con el que no ha sido coloreado ninguno de sus adyacentes.

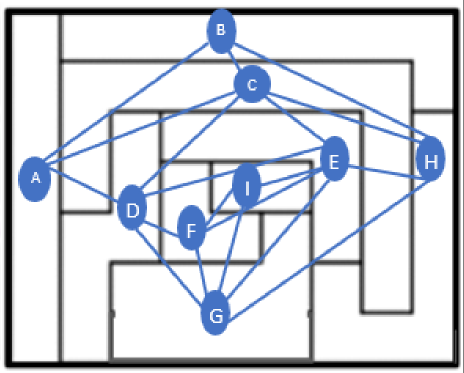
Paso 3: Si todos los vértices están coloreados, ya has acabado. Si no, vuelve al Paso 2

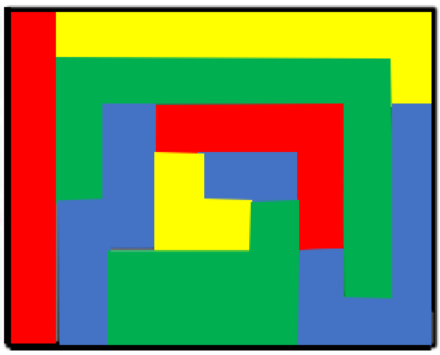
Colorea esta otra figura modelizando el problema con un grafo, (dibuja el grafo sobre el mapa) después aplica el algoritmo de coloración anterior ¿Cuántos colores has necesitado? ¿Se puede hacer con menos?



Utiliza esta tabla para ayudarte a colorear los vértices (regiones) y usa este orden de colores 1 rojo, 2 verde, 3 azul , 4 amarillo

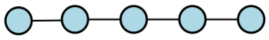
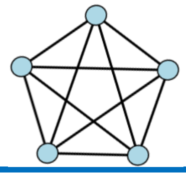
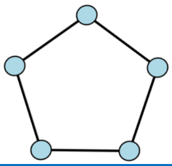
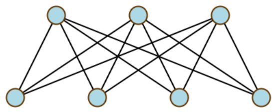
Vértice	E	C	D	G	F	H	A	B	I
Grado	**6**	**5**	**5**	**5**	**4**	**4**	**3**	**3**	**3**
Color	rojo	verde	azul	verde	amar	azul	rojo	amar	Azul





Dibujamos el grafo sobre el mapa, se ordenan por orden decreciende de su grado en la tabla se sigue el algoritmo. Nos salen 4 colores, y no puede haber menos. Aunque es un buen algoritmo, hay que recordar que no garantiza que hayamos encontrado el menor nº de colores, se trataria de comprobar que no se puede hacer con menos revisando los nodos, sobre todo lo que tienen más vecinos.

Completa la siguiente tabla con el menor nº de colores que necesita cada grafo para ser coloreado.

GRAFO	Nº MÍNIMO DE COLORES	GRAFO	Nº MINIMO DE COLORES
	2		n
	2 si n es par 3 si n impar		2

¿Cuál es el mínimo número de colores que necesita K_5 para ser coloreado ? ¿Y K_6? ¿Contradice entonces tu respuesta el teorema de los 4 colores?

5 y 6 respectivamente. No contradice el teorema de los 4 colores ya que este teorema solo es válido para grafos planos y K_5 y K_6 no son planos

La coloración de grafos tiene muchas aplicaciones en problemas de la vida diaria donde se producen incompatibilidades o conflictos. Resuelve el siguiente problema utilizando la coloración de grafos.

Supongamos que una organización de voluntarios está rescatando animales heridos que habitan en un área de Australia gravemente afectada por los incendios. Los animales van a ser enviados a zonas más seguras, donde se les proporcionara alimento y cuidados médicos, pero debido a las características de los animales (tamaño,tipo de alimentación,…), hay que ubicarlos recintos diferentes según las restricciones las siguientes:

*Los canguros no se pueden transportar con los quokkas, koalas ni quols tigre.

*Los numbats no se pueden transportar con los emús, wallabis ni canguros.

*Los wallabis no se pueden transportar con los koalas, quokkas ni quols tigre.

*Los emús no se pueden transportar con los quokkas, koalas ni con los quol tigres.

¿Cuál será el número mínimo de recintos necesarios para ubicar a estos animales de acuerdo con las restricciones anteriores? Dibuja el grafo que modeliza este problema pero completa estas frases:

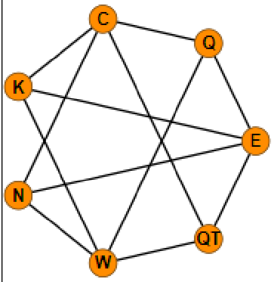
*Los vértices son: ______*los animales*____

*Dos vertices están conectados si:_*los animales que representan no pueden estar en el mismo recinto*

*Los colores representan :___*El número mínimo de colores representa el número de recintos necesarios*__

(Problema recuperado de https://riubu.ubu.es/handle/10259/5738)

GRAFO



Dibujamos el grafo, y aplicamos el algoritmo con este orden de colores 1 rojo, 2 verde, 3 azul, 4 amarillo,…

	C	*E*	*W*	*K*	*N*	*Q*	*Q_T*
Grado	*4*	*4*	*4*	*3*	*3*	*3*	*3*
Color	*rojo*	*rojo*	*rojo*	*verde*	*verde*	*verde*	*verde*

Si dibujamos el grafo vemos que se puede colorear con dos colores, en un recinto estarán los animales cuyo vértice es verde y en el otro reciento los animales cuyo vértice es rojo.

Recinto1: {C, E, W} ***Recinto2: { K, N, Q, Q_T}***

Imagina que debes programar los horarios de realización de las actividades extraescolares que oferta un colegio después de las clases. Los alumnos pueden apuntarse a varias extraescolares, a una o ninguna, por lo que todas las actividades no podrán realizarse el mismo día. Además, la escuela no desea estar abierta el menor número de días posible para realizar las extraescolares. Por lo tanto, se necesita programar la menor cantidad de días de la semana posible para las extraescolares. A continuación se muestra la lista de actividades y los alumnos del colegio que se ha apuntado a más de una extraescolar.Realiza la programación de las extraescolares del colegio de forma óptima. Pero antes completa estas frases:

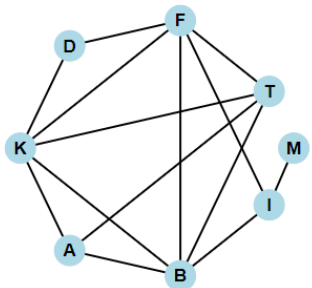
*Dos actividades son incompatibles, no pueden hacerse el mismo día si__*hay un alumno que está apuntado a las dos*__________

*Los vértices son: ____*Las actividades*____

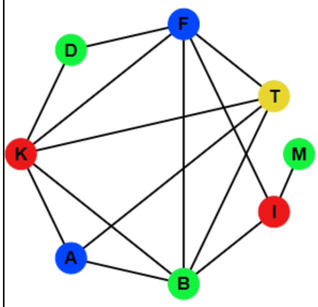
*Dos vertices están conectados si:____*tienen alumnos comunes*________________________________

*Los colores representan :__*el número de días mínimo que tendrá que abrir el centro*_____________

EXTRAESCOLAR	Alumnos que se han apuntado a más de una extraescolar
KARATE	Cristina, Juan, Ajar
AJEDREZ	Cristina, Ajar, Luis
DATCHBALL	Juan
BALONCESTO	Ajar, Luis, Sergio
FÚTBOL	Juan, Sergio, Julia
MÚSICA	Miguel
INGLÉS	Miguel, Sergio
TEATRO	Cristina, Luis, Julia



- Establecemos el siguiente orden de colores: 1 rojo, 2 verde, 3 azul, 4 amarillo, … y creamos la tabla con los vértices ordenados de grado mayor a menor.
- Escogemos el vértice K y lo coloreamos con el color 1(rojo)
- Paso al vertice B y como es adyacente a K debo utilizar el siguiente color, el 2 verde.
- Pasamos al vértice F es vecino de K y B por lo que no puedo utilizar el color 1 ni 2, debo utilizar el color 3 azul



- Pasamos al vertice T es vecino de K, B y F no puedo utilizar los colores 1,2,3, debo utilizar el 4 el amarillo
- Pasamos al vértice I es vecino de B y F, colores 2 y 3, así que lo coloreo con el color 1, rojo
- Pasamos al vertice A, es vecino de K,B y T colores 1,2 y 4, lo pinto del color 3 azul.
- Pasamos a D vecino de F y K colores 1 y 3 por lo que lo pintamos de color 2 verde.
- Pasamos a M solo es vecino de D color 2, lo coloreamos con el color 1 rojo.

K	B	F	T	I	A	D	M
5	5	5	4	3	3	2	1
R	V	A	Am	R	A	V	V

2.4 ACTIVIDADES Y SITUACIONES PARA SEGUIR PRACTICANDO

1. ¿Cuantos vértices tiene un grafo con 12 aristas y todos sus vértices son de grado 4?

*Si el grafo tiene V vértices, sabemos que la suma de sus grados es 2*12=24, por lo tanto 4*V=24 y V=6*

2. Si G es un grafo conexo y plano, cuyos vértices tienen grado ≥ 4 y su número de aristas es 16. ¿Cuantos vértices tiene?

Si es plano, se cumple que $A \leq 3V-6$ $16 \leq 3V-6$ $V \geq 22/3$. Por otra parte suma grados=2A y la suma de grados es $\geq 4.V$ Así $32 \geq 4V$ por lo que V=8

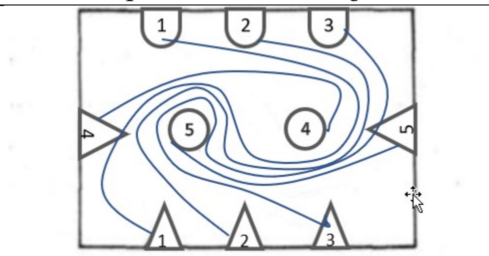
3. Encuentra todos los grafos regulares con 15 aristas.

C_{15}, K_6 y grafo de Petersen (grafo regular con 10 vértices de grado 3) $30=nV=3.10=6.5=2.15$

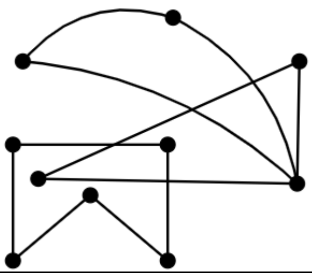
4. Si G es un grafo con 9 vértices, y estos solo pueden tener grado 5 o grado 6. Demuestra que hay al menos 5 vertices con grado 6 o al menos 6 vértices con grado 5 *(Problema recuperado de Revuela, SM)*

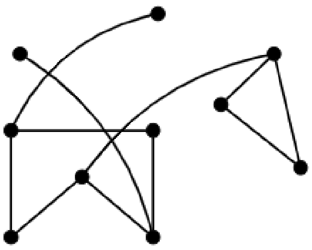
Hacemos todas las combinaciones posibles $\cancel{9V_5}$, $1V_68V_5$, $\cancel{2V_67V_5}$, $3V_66V_5$, $\cancel{4V_65V_5}$, $5V_64V_5$, $\cancel{6V_63V_5}$, $7V_62V_5$, $\cancel{8V_61V_5}$, $9V_6$ En todas las opciones vádidas siempre hay al menos 5 vértices de grado 6 o 6 vértices de grado 5.

5. La revista "Alrededor del Mundo" se publicaba cada 15 días entre 1899 y 1930. En las páginas finales siempre estaban dedicadas a presentar problemas de ajedrez, pasatiempos y acertijos. El siguiente problema apareció en 1899. ¿Puedes encontrar la solución?

 Los ángulos son cinco manantiales que tienen que regar los jardines de igual número, sin cruzarse, porque el agua de un arroyo se iría al otro, ni salirse fuera de las dos rayas. — C. G. P.	*Se trata de un grafo bipartito, podemos aplicar el teorema de Kuratowski, todos los vértices tienen grado 1 por lo tanto es plano.*

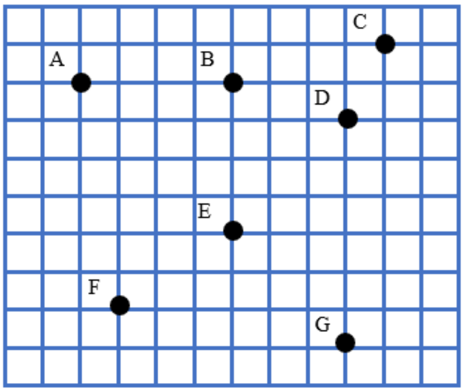
6. Determina si estos dos grafos son conexos o no.



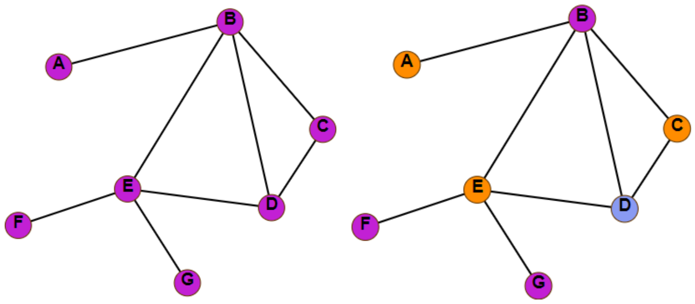


El primero es No conexo, cualquiera de los puntos que formar el polígono de 5 vértices de la deracha no está conectado con los puntos del triángulo por ejemplo. *El segundo es conexso, al escoger dos puntos cualesquiera siempre podemos encontrar un camino que los une.*

7. Supongamos que las 7 nuevas estaciones de radio que han solicitado permisos de transmisión están ubicadas como se muestra en la imagen. Un lado de cada cuadrado pequeño en la cuadrícula representa 100 Km. La Corporación de Radio y Televisión Española, S.A. desea asignar una frecuencia a cada estación para que ninguna interfera con las demás. La CRTE también desea asignar el menor número posible de nuevas frecuencias teniendo en cuenta que estaciones que estén separadas más de 500 Km no interferirán entre sí. ¿Cuál es el número mínimo de frecuencias que se pueden asignar?(*Problema adaptado de Vertex-Edge Graphs de Ramsden Stuart)*



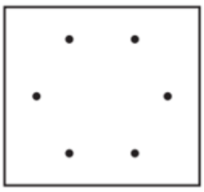
En el grafo los vértices son estaciones y serán adyacentes si estan a una distancia menor o igual de 500 Km, ya que entonces deberán tener distinta frecuencia (es decir distinto color en el grafo) Podemos ver que se necesitan tres colores para colorear el gráfico. Eso quiere decir que se necesitan tres frecuencias de radio para que las estaciones que están dentro de 500 millas unas de otras reciban diferentes frecuencias.



8. Escribe un problema o situación que se modelice con el grafo $K_{2,4}$

Un menú de un restaurante en el que haya dos primeros y 4 segundos, hallar todas las posibles combinaciones de menús.

9. Dibuja un mapa con más más de 6 regiones que necesite solo dos colores, dibuja otro que solo necesite 3 colores y otro que necesariamente necesite 4 colores.
10. Te mostramos un juego interesante que implica un tipo de coloración de bordes que puedes jugar:



- Coloca 6 puntos en una hoja de papel para marcar los vértices de un hexágono regular, como se muestra en la figura.
- Cada jugador selecciona un color diferente al del otro.
- Se turnan para conectar 2 vértices con un borde. Cada jugador debe usar su colo al agregar un borde.
- El primer jugador que se vea obligado a formar un triángulo de su propio color pierde. (Solo cuentan los triángulos con vértices entre los 6 vértices iniciales.)
  Juega este juego varias veces y luego responde las preguntas a continuación.
- ¿Siempre hay un ganador?

- ¿Qué jugador tiene mejor oportunidad de ganar? Explícalo.
- ¿De entre cualquier grupo de 6 estudiantes que estén en una habitación, debe haber al menos 3 conocidos mutuos o al menos 3 desconocidos mutuos?

11. Dado un conjunto de enteros positivos C = {a_1, a_2, a_3, …, a_k} definimos un grafo G(C) del siguiente modo:

 • Un vértice para cada elemento de C.

 • Dos vértices ai y aj están unidos si ai|aj o viceversa.

 Dibuja el grafo G(C) para los siguientes conjuntos:

 a) {2,3,4,6,5,12,21}

 b) {2,8,12,24,14,7}

 Busca (si es que es posible) conjuntos C de enteros de manera que su grafo sea:

 a) El grafo completo de 4 vértices.

 b) El grafo completo de 5 vértices.

 c) Un ciclo de 4 vértices.

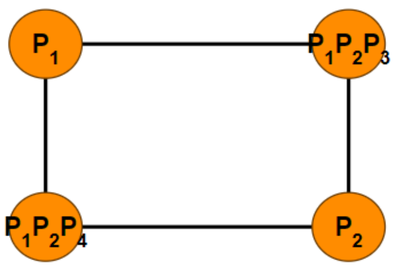
 d) Un ciclo de 5 vértices.

SOLUCIÓN

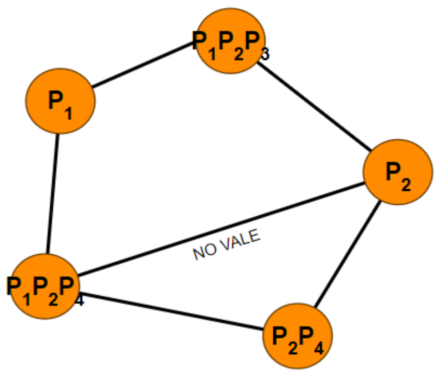
a) El grafo completo de 4 vértices: p^1, p^2, p^3, p^4 *siendo p un entero cualquiera*

b) El grafo completo de 5 vértices. p^1, p^2, p^3, p^4, p^5 *siendo p un entero cualquiera*

c) Un ciclo de 4 vértices: $P_1P_2P_3$ *Y* P_4 *son primos entre sí.*



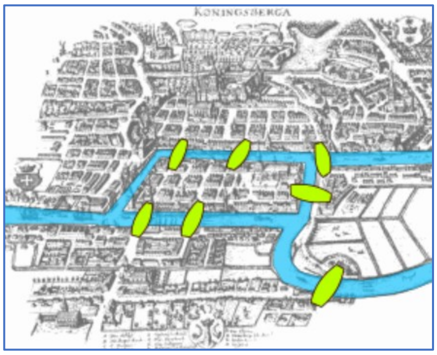
d) Un ciclo de 5 vértices. No es posible



2.5 ENCONTRANDO EL MEJOR CAMINO

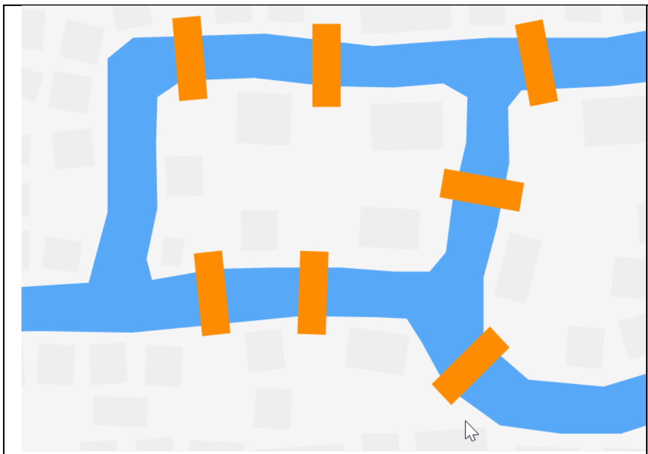
2.5.1 RECORRIENDO TODAS LAS ARISTA UNA SOLA VEZ: GRAFOS EULERIANOS.

Visualiza el video " Los puentes de Königsberg" hasta el minuto 2'33''

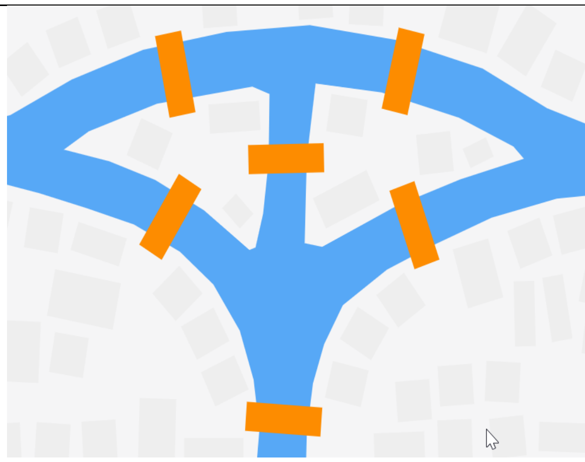


A principios del siglo XVIII, Königsberg era una ciudad de la antigua Prusia Oriental, (en la actualidad se llama Kaliningrado y es una ciudad rusa). Era una ciudad portuaria que estaba atravesada por el **río Pregel**, era un gran centro económico, intelectual y cultural del país. Tal y como se muestra en el plano de la figura, el terreno de la ciudad se dividía en **4 regiones** conectadas por 7 puentes. Sus habitantes daban largos paseos por la ciudad y sus puentes y para entretenerse plantearon el siguiente problema: es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de las regiones de la ciudad, pasando por todos los puentes, recorriendo solo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida? **En 1736 Leonard Euler dio la solución y esto dio origen a la teoría de grafos.**

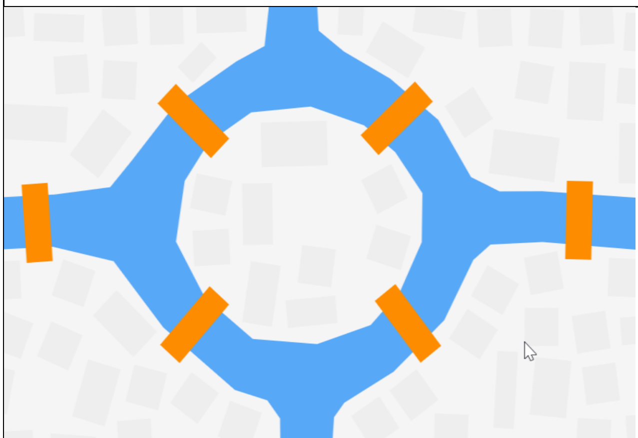
Para cada uno de los siguientes mapas, fíjate que el primero corresponde al de los 7 puentes de **Königsberg, trata de encontrar** una ruta válida de forma que comience en una región cualquiera de la ciudad, pase por todos los puentes, recorriendo solo una vez cada uno, y regrese al mismo punto de partida. Compara tus resultados con los de tus compañeros. **En caso de que no puedas encontrar una ruta, añade o quita los puentes que necesites para que pueda existir esa ruta.** Puedes hacer el problema online en https://mathigon.org/course/graph-theory/bridges



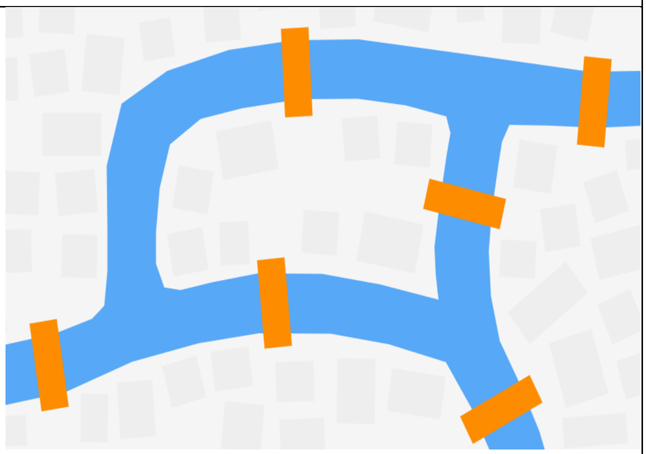
MAPA 1: **Königsberg**



MAPA 2



MAPA 3



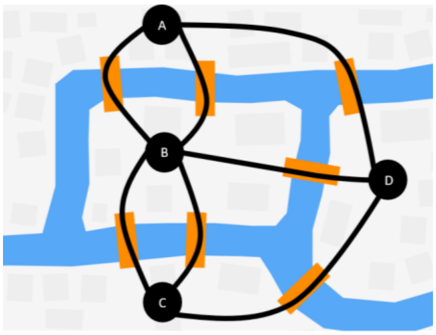
MAPA 4

Imágenes recuperadas de https://mathigon.org/

Utilizaremos ahora un modelo matemático para representar este problema, para ello transforma en un grafo cada mapa, dibuja el graf o sobre el propio **de forma que incuya solo los elementos principales de cada uno de ellos (llama a las regiones con letras A, B, C, D,E…).** Antes completa las siguientes frases:

Los vértices son: ____*las regiones*____

Dos vértices, regiones, están unidos por una arista si:___*hay un puente entre ellas*__________



En la imagen mostramos el grafo correspondiente al problema original de los puentes. Se trata de hacer lo mismo con el resto de mapas.

Completa la siguiente tabla con los grados de los vértices de los 4 mapas iniciales, y si has tenido que modificar alguno para encontrar la ruta que pase por todas los puentes una sola vez comenzando y acabando en la misma región completa la tabla también.

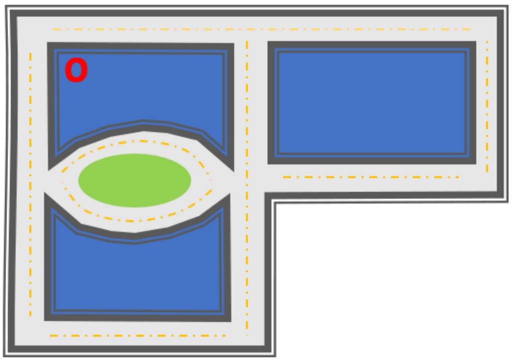
	Gr(A)	Gr(B)	Gr(C)	Gr(D)	Gr(E)
MAPA 1	3	5	3	3	
MAPA 1b					
MAPA 2	2	3	3	2	2
MAPA2b					
MAPA 3	2	2	4	2	2
MAPA 3b					
MAPA 4	3	3	3	3	
MAPA 4b					

Aunque la teoria de grafos inicilamente surgió a raiz de un juego, **encontrar una ruta que recorra todas las aristas de un grafo una única vez tiene muchas aplicaciones en la vida real:** mejor ruta para recoger dinero de parquímetros, entregar periódicos o quitar la nieve de las calles de la ciudad.

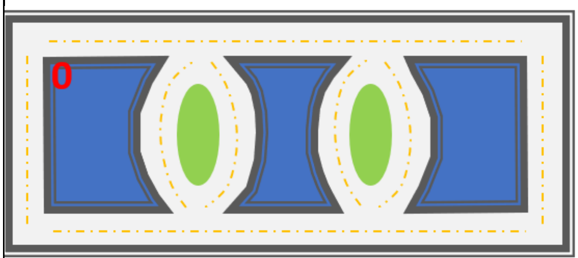
En las siguientes imágenes vemos el plano del Barrio A y el del barrio B de una población. **A lo largo de todas las aceras de cada barrio se distribuyen varios parquímetros.** Para recoger el dinero de los parquímetros hay una persona encargada en cada barrio, a las 9:00 horas llegan a la oficina **O** de su barrio, recorren todas las calles de su barrio recogiendo el dinero y lo llevan a su oficina.¿Ayúdales a encontrar **una ruta óptima de modo que no repitan aceras, si es posible**,a ambas personas ?.

Antes completa: los vértices son ___*las intersecciones de calles*_____ y las aristas son___*las aceras.*

BARRIO A

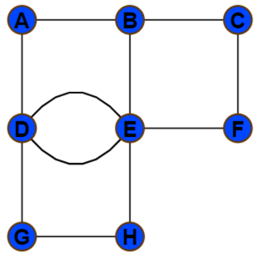


BARRIO B

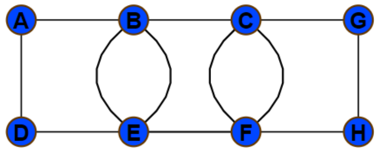


La ruta óptima será aquella que comience en la oficina O, recorra todas las aceras una única vez , si es posible, y regrese a la oficina O. Los grafos son los que aparecen en la figura. En el barrio A no va a ser posible encontrar una ruta que salga de la oficina, recorra todas las aceras una única vez y vuelva, la mejor ruta obliga a repetir una arista, la BE. En el barrio B, sí es posible encontrar esa ruta: A sería el vértice asociado a la oficina, la ruta sería A→B→E→B→C→F→C→G→H→F→E→D →A

BARRIO A



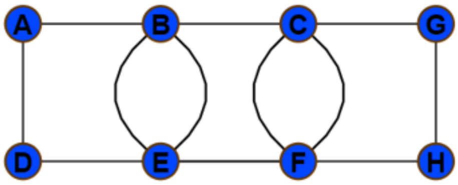
BARRIO B

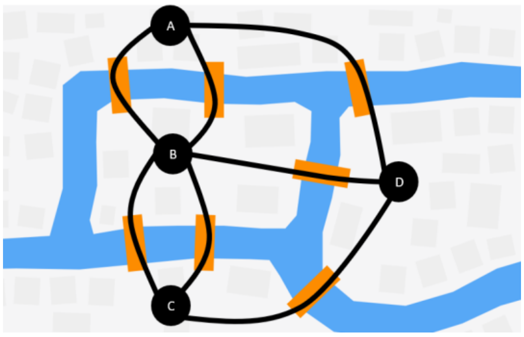


Completa la tabla con los grados de los vértices

	A	B	C	D	E	F	G	H
BARRIO A	2	3	2	4	5	2	2	2
BARRIO B	2	4	4	2	4	4	2	2

Decimos que **un grafo conexo es un grafo euleriano** si **se pueden recorrer todas sus aristas una sola vez empezando y terminando en el mismo vértice**.





El grafo del barrio B es euleriano, en cambio el grafo de los puentes de Königsberg no es euleriano.

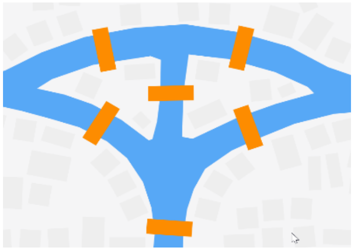
Revisa de nuevo las tablas de ambas situaciones, la de los puentes y la de los parquímetros. Fíjate en los grados de los vértices. ¿Cómo son los grados de los grafos en los que has encontrado un recorrido euleriano? ¿Y en los que no lo has encontrado? ¿Puedes conjeturar una propiedad que nos ayude a saber cuando un grafo es euleriano?

Se trata de que los alumnos se den cuenta que si los vértices del grafo son todos pares el grafo es euleriano y si hay algún vértice del grafo que es impar, el grafo no puede ser euleriano.

Otro tipo de rutas que nos ayudan a resolver muchos problemas cotidianos son aquellas que partiendo de un vértice inicial recorran todas las aristas una única vez y lleguen a un vértice final diferente del inicial.

Decimos que **un grafo conexo es semieuleriano** si partiendo de un vértice inicial podemos recorrer todas sus aristas una sola vez y acabamos en un vértice distinto a la inicial.

Si nos fijamos en el mapa 2, ¿puedes encontrar un recorrido semieuleriano? Dibuja el grafo sobre el mapa y cuando lo encuentres completa la tabla siguiente. **¿Qué diferencia hay entre el grado del vértice incial y final con los grados de los vértices intermedios?**



Gr(Inicio)	GR(V2)	GR(V3)	GR(V4)	Gr(Fin)
3	2	2	2	3

En los recorridos eulerianos hemos visto que todos los grados de los vértices eran pares. En este recorrido semieuleriano son todos los grados pares excepto el primero y el último.

Para que un grafo sea semieuleriano, **los vértices intermedios deben tener un número par de aristas**. es decir, deben tener **una arista para para entrar y una para salir, si de nuevo hubiera una tercera arista para entrar, al ser vértice intermedio, deberá haber otra arista para salir de él**. Sólo los puntos de inicio y salida deben tener un número impar de aristas, porque, al comienzo del recorrido, salimos del punto de inicio, es decir utilizamos una arista, si a lo largo del recorrido debemos pasar por él otra vez, tendremos que tener otra arista para salir haciendo que el número de aristas deba ser impar.Con el punto final pasa lo mismo, cuando termine el recorrido a ese punto solo llegamos, pero ya no salimos de él. **Formalmente tenemos los dos teoremas de Euler:**

Teorema de Euler para grafos eulerianos

Un grafo conexo es euleriano si y solo si, todos sus vértices tienen grado par.

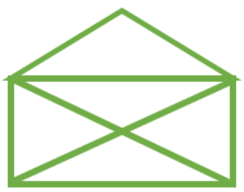
Teorema de Euler para grafos semieulerianos

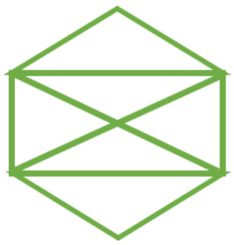
Un grafo conexo es semieuleriano si y solo si, todos sus vértices tienen grado par excepto dos de ellos que serán el vértice inicial y el final que tendrán grado impar.

Hemos visto que si todos los vértices son de grado par podemos encontrar un ciclo euleriano y si todos son de grado par excepto dos, podemos encontrar un camino semieuleriano. **¿Y si el grafo tiene solo un vértice de grado impar?**

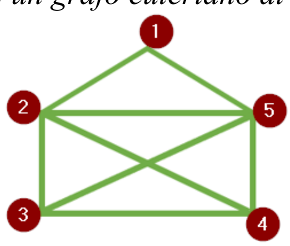
Esto es imposible ya que la suma de los grados debe de dar un número par.

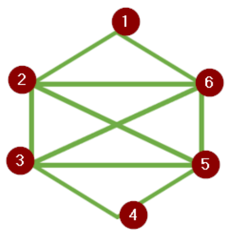
En todo el mundo hay juegos donde el reto es trazar una figura sin levantar el lapiz del papel y regresar al punto de partida. Por ejemplo, comprueba si las siguientes figuras las puedes trazar sin levantar el lápiz. **¿A qué sería equivalente este problema de trazado sin levantar el lápiz si lo viesemos desde el punto de vista de los grafos? Busca el recorrido que realizarás en cada caso pensando qué estrategia vas a seguir para realizarlo, anota el orden en el que pasarás por los véritices.**





Podemos asociar a cada figura un grafo, los vértices serían las 5 esquinas exteriores en el caso del primer dibujo o las 6 esquinas exteriores en el caso del segundo. En el primer caso al haber 2 vértices de grado 3 y el resto de grado par es semieuleriano. En el segundo caso es un grafo euleriano al ser todos los vértices de grado par.

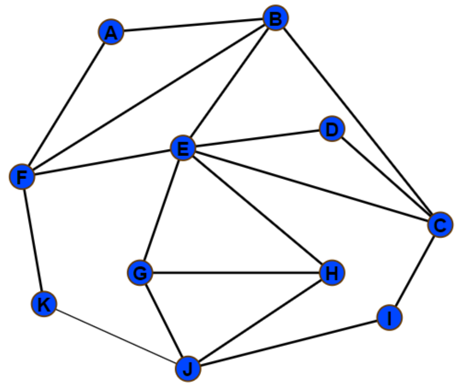




4→5→1→2→5→3→2→4→3   1→6→5→4→3→5→2→6→3→2→1

No siempre es sencillo encontrar un camino euleriano, aún cuando sepamos que el grafo es euleriano, fíjate en el grafo de la siguiente figura, empieza a complicarse y es necesario seguir una pauta ya que el método ensayo error puede llegar a ser muy costoso. **En general hay un algoritmo eficiente para encontrar un ciclo euleriano C.**

Vamos a ver las etapas o pasos de este algoritmo sobre este ejemplo:

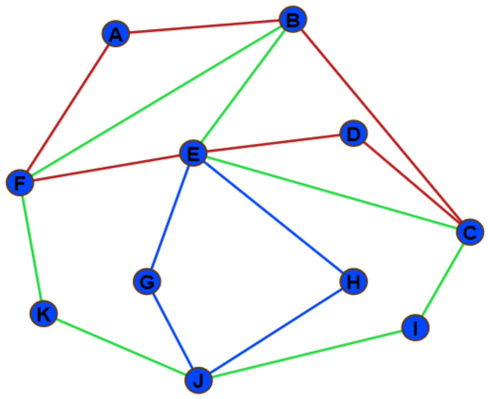


Paso 1: Se elige un vértice cualquiera, A por ejemplo, y un ciclo que lo contenga, lo llamaremos C_0. Recuerda que, si el grafo es euleriano, al menos hay un ciclo que contiene a ese vértice que es euleriano. Inicialmente nuestro ciclo euleriano $C=C_0$

Paso 2: Borramos las aristas del ciclo C_0 y buscamos otro ciclo que contenga a A. Si no hay tal ciclo, pasamos al siguiente vértice de C_0 hasta que encontremos un vértice V que tenga otro ciclo euleriano y lo llamaremos C_1

Paso 3: En C nos colocamos en el vértice V y lo sustituimos por el ciclo C_1. Borramos las aristas de C_1del nuestro grafo. Si siguen quedando aristas, volvemos al paso 2. Si ya no quedan aristas, hemos encontrado ya nuestro ciclo euleriano.

Trata de encontrar un ciclo euleriano para el grafo de la anterior figura. Compáralo con el que ha encontrado tu compañero ¿Las dos soluciones son válidas?



C_0={A-B-C-D-E-F-A}=C
C_1={ B-F-K-J-I-C-E-B}
C={A-B-F-K-J-I-C-E-B-C-D-E-F-A}
C_2={ E-H-J-G-E}
C={A-B-F-K-J-I-C-E-H-J-G-E-B-C-D-E-F-A}

Algunas ciudades en el sur de Alaska están en islas o aisladas por cordilleras montañosas. Cuando viajas entre estas ciudades, debes tomar un barco o un avión. A continuación se indican las rutas proporcionadas por una aerolínea local.

*Anchorage y Cordova

*Anchorage y Juneau

*Cordova y Yakutat

*Juneau y Ketchikan

*Juneau y Petersburg

*Juneau y Sitka

*Petersburg y Wrangell

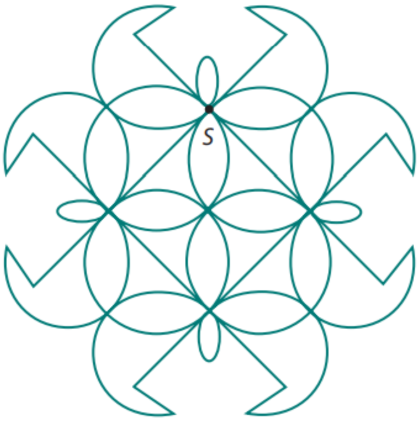
*Sitka y Ketchikan

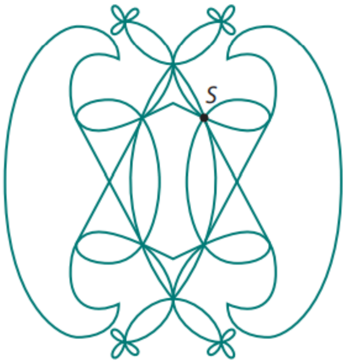
*Wrangell y Ketchikan

*Yakutat y Juneau

Una inspectora quiere evaluar las operaciones de la aerolínea volando cada ruta. Es suficiente volar cada ruta en una dirección. ¿Puede comenzar en Juneau, volar todas las rutas exactamente una vez y terminar en Juneau? *(Problema adaptado de Vertex-Edge Graphs de Ramsden Stuart)*

El trazado de figuras continuas se exhibe en culturas de todo el mundo. Los Malekula viven en una isla en la cadena del Pacífico Sur de unas ochenta islas que comprenden la República de Vanuatu. Los Malekula también tienen figuras que representan objetos o símbolos de la cultura. Por ejemplo, la Figura I a continuación representa un ñame. La Figura II se llama "la piedra de Ambat".



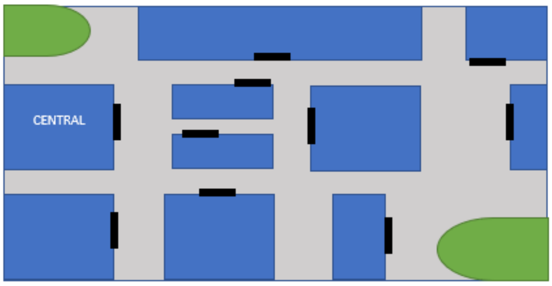


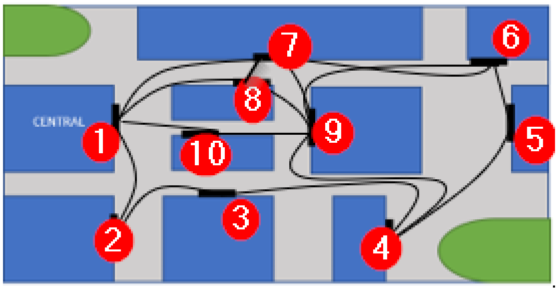
¿Puedes trazar cada una de estas figuras sin levantar tu lápiz o trazar ningún borde más de una vez?

2.5.2 RECORRIENDO TODOS LOS VÉRTICES UNA VEZ. GRAFOS HAMILTONIANOS

En las situaciones planteadas en el apartado anterior, nos interesaba encontrar rutas que recorriesen todas las aristas de un grafo.

Imagina ahora un repartidor de paquetería que debe salir de la Central de paquetería, pasar por todos los portales de los bloques azules de edificios del plano y **volver a la central**. Quiere diseñar una ruta óptima. Dibuja el grafo correspondiente al plano. ¿Qué tipo de ruta es la que nos interesa encontrar ahora en el grafo, es necesario que pase por todos los vértices? ¿Y por todas las aristas?





Representamos el grafo de modo que dos vértices, portales, están relacionados si se puede llegar caminando del uno al otro sin pasar por delante de otro portal. Podemos representar el grafo sobre el plano. Podemos hallar facilmente un camino que recorra una sola vez todos los vértices sin necesidad de pasar por todas las aristas, en la figura vemos uno que recorre todos los vértices y por ejemplo no pasa por la arista 1->7

Estamos ante un nuevo tipo de situación, **ya no nos interesa pasar por todas las calles una sola vez y volver al punto de partida, sino que nos interesa pasar por todos los vértices una sola vez** y volver al punto de partida.

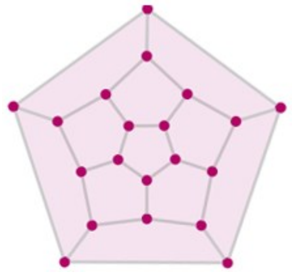
Cuando en un grafo podemos encontrar un ciclo que recorra todos sus vértices una sola vez, diremos que es un grafo **Hamiltoniano**.

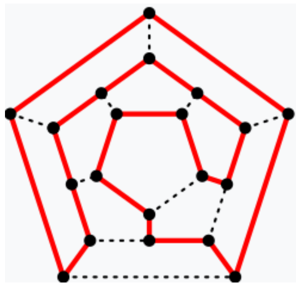
Su nombre se debe al matemático irlandes Sir William Hamilton, que en 1859 propuso el juego " The Icosian Game", el objetivo del juego era encontrar una ruta siguiendo las aristas del dodecaedro, de forma que se pasase una y sólo una vez por cada ciudad atravesando algunas de las aristas para volver a la ciudad original. Una de las versiones del juego utilizaba el grafo asociado al dodecaedro.

¿Cuantos vértices y cuantas aristas tiene un ciclo hamiltoniano de un grafo de n vértices? Piensa la respuesta y antes de escribirla compárala con la de tu compañero.

Todo ciclo hamiltoniano de un grafo hamiltoniano de n vertices tiene exactamente n vértices ya que debemos pasar por todos ellos una sola vez, y n aristas, al tratarse de un ciclo, cada vétice tiene dos aristas, pero ten en cuenta que cada arista la estamos contando dos veces, por lo tanto tiene n aristas.

Busca un ciclo hamiltoniano en el grafo del dodecaedro. ¿Has necesitado recorrer todas las aristas?





En la imagen vemos un ciclo hamiltoniano y podemos ver que NO es necesario recorrer todas las aristas.

Imagen realizada por Christoph Sommer

Del mismo modo que nos interesa reconocer si un grafo es euleriano y encontrar un ciclo euleriano, también nos interesa reconocer cuando un grafo es hamiltoniano y encontrar el ciclo hamiltoniano. Puesto que tiene muchas aplicaciones, por ejemplo en la planificación de rutas de transporte óptimas, **pero no hay un resultado general para saber si un grafo es hamiltoniano, se trata de un problema abierto y es que en matemáticas no está "todo resuelto".**

En los dos ejemplos que hemos visto hemos resuelto facilmente encontrar si hay un ciclo hamiltoniano, **pero imagina que se tratase de un grafo de 100, 1000 o 10.000 vértices, necesitamos conocer más propiedades sobre los grafos hamiltonianos para poder al menos acotar el problema.**

¿Puede haber un grafo hamiltoniano que no sea conexo? ¿Cómo mínimo qué grado deben tener sus vértices?

*Si el grafo es hamiltoniano eso quiere decir que hay un ciclo que pasa por todos los vértices, luego si escojo dos vértices cualesquiera, encontraré un camino que los una (bastará con descartar las aristas y vértices del ciclo que no nos interesen), por lo tanto, **un grafo hamiltoniano obligatoriamente debe ser conexo o dicho de otro modo, si G es un grafo no conexo, no puede ser hamiltoniano.***

Por otra parte, si el grafo es hamiltoniano, eso quiere decir que hay un ciclo que recorre todos sus vértices una sola vez, y ya sabemos que en los ciclos el grado de cada vértice es 2. Así que como mínimo cada vértice tendrá grado 2.

Imagina que G es un grafo hamiltoniano y que en él hay un vértice v de grado 2, es decir que solo tiene dos aristas. ¿Qué podemos decir de estas aristas?

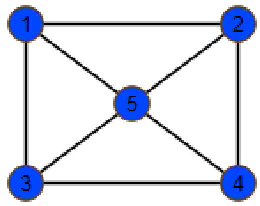
*Ambas aristas claramente deberán formar parte del ciclo, desde un vértice **v** tenemos que llegar al vértice de grado 2 utilizando una arista y salir de ese vértice por la otra arista, ya que si utilizase la arista por la que he entrado volvería al vertice **v** y no puedo pasar dos veces por **v***

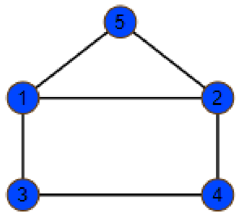
Dado un grafo, no hay un método para saber si es hamiltoniano, la tarea de averiguar si un grafo es o no hamiltoniano se complica enormemente cuando crece el número de vértices, es decir **no hay un algoritmo que encuentre en un tiempo eficiente un ciclo,** pero esta propiedad nos puede ser útil**:**

Teorema de Dirac

Todo grafo conexo, simple, de n vértices, $n \geq 3$, en el que se cumple que el grado de cada vértice es mayor o igual que $\frac{n}{2}$, es hamiltoniano.

Fíjate en los siguienes grafos. ¿En ambos se cumple el teorema de Dirac?¿Son hamiltonianos los dos ? ¿Puede ser que sea erróneo este teorema?

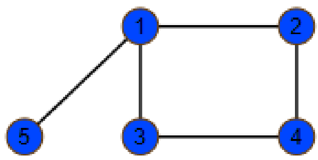


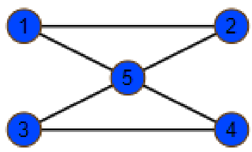


El primer grafo cumple el teorema de Dirac, tiene 4 vértices de grado 3 y uno de grado 4,
$\frac{n}{2}$ *=2,5 por lo que todos tienen grado mayor que* $\frac{n}{2}$ *y el grafo es hamiltoniano, un posible ciclo 1→2→5→4→3→1*

El segundo grafo no cumple el teorema de Dirac puesto que los vértices 3 y 4 son de grado 2 que es menor que $\frac{n}{2}$ *=2,5. Pero eso no quiere decir que no sea hamiltoniano, el teorema de Dirac solo da una condición suficiente. Si nos fijamos podemos encontrar un ciclo hamiltoniano facilmene 1→5→2→4→3→1*

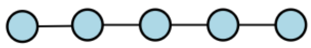
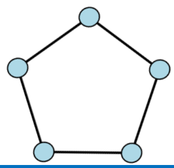
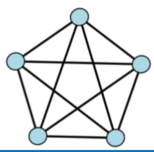
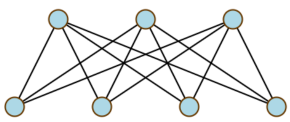
Indica para estos dos grafos el motivo por el que no pueden ser hamiltonianos. *(Problema recuperado de Matemáticas generales 1º de Bachillerato.Oxford)*





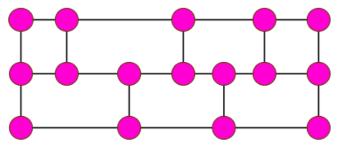
En este caso es claro que nunca vamos a poder encontrar un ciclo ya que hay un vértice con grado 1, no se podría cerrar el camino.	*Necesariamente las aristas de los vértices 1,2,3 y 4 han de pertenecer al ciclo, pero esto obliga a tener que pasar dos veces por el vértice 5, por lo tanto no es hamiltoniano.*

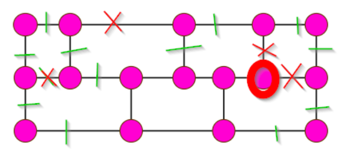
Para las siguientes familias de grafos, indica si son o no hamiltonianos

Grafo	**Hamiltoniano**
$\mathbf{P_n}$ 	No
	Sí, solo hay un único ciclo hamiltoniano.
$\mathbf{K_n}$ 	Sí, claramente el ciclo más “externo” recorre todos los vértices una sola vez.
$\mathbf{K_{n,m}}$ 	Hay que estudiar cada caso.

Si un vértice del grafo tiene **grado mayor que 2**, entonces cuando se intenta construir un ciclo Hamiltoniano, una vez que se pase por ese vértice, las **aristas no utilizadas** incidentes se dejan de tener en cuenta, y se pueden **eliminar** para facilitar la construcción del ciclo.

Utilizando todas las propiedades que hemos visto hasta ahora, comprueba que el siguiente grafo no es hamiltoniano. (*Problema recuperado de Revuela, Matemáticas generales1º Bachillerato.SM*)

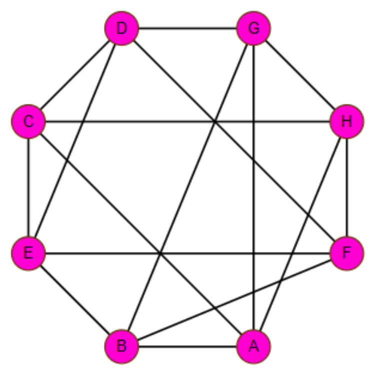




Vamos aplicando alternativamente que los vértices del ciclo deben tener grado 2, llegamos al vértice marcado en rojo y vemos que solo puede tener una arista dentro del posible ciclo y eso no es posible, debe tener dos. Luego no es hamiltoniano.

Ya hemos visto anteriormente como los grafos hamiltonianos nos pueden ayudar a encontar una distribución de personas alrededor de una mesa. Solo que entonces no conocíamos todas estas propiedades y condiciones para ayudarnos a averiguar, aunque no siempre, si un grafo es hamiltoniano.

En una cena hay 8 personas y queremos sentarlas en una mesa redonda de forma que conozcan a las dos personas que se sientan a su lado. ¿Será posible encontrar una distribución si cada una de ellas conoce al menos a 4 personas?. Si es así, indica una posible disposición en la mesa.



Aplicando Dirac, tenemos que todos los vértices tienen grado 4 y en total hay 8 vértices. Se cumple entonces el teorema de Dirac y podemos encontrar un ciclo hamiltoniano.

Ya hemos dicho que no hay un algoritmo para hallar un ciclo hamiltoniano, tendremos que aplicar las propiedades anteriores, ensayo-error,…
Hay aplicaciones que nos permiten hallar un ciclo hamiltoniano si hay pocos vértices. Prueba a calcularlo en la siguiente dirección https://graphonline.ru/es/

Probablemente la aplicación práctica más importante de los grafos hamiltonianos es la búsqueda de rutas eficientes destacando la elección de un recorrido óptimo a la hora de transportar mercancias, rutas escolares, recolección de basura.. Piensa en el caso del repartidor de paqueteria, necesita encontrar una ruta que pase por todos los edificios azules una única vez. ¿Crees que solo hay una ruta posible o puede haber varias? Si hay varias, ¿qué criterio seguirá para escoger la mejor ruta?

Si estamos transportando mercancias y hay varias rutas hamiltonianas, ¿Cúal escogeremos? Lógicamente trataremos de escoger la ruta más corta, por lo que **las aristas tendrán que tener un peso que es la distancia entre los vértices.**

Este problema, conocido **como el problema del viajante o TSP (Traveling Salesman Problem)** fue formulado por primera vez en 1930 y es uno de los problemas de optimización más estudiados y responde a la siguiente pregunta: **Dada una lista de ciudades junto con la distancia que hay entre cada par de ellas, ¿cuál es la ruta más corta posible que puede elegir un viajante de comercio de modo que salga de su ciudad, visite una única vez cada ciudad de la lista y regrese a su ciudad de origen?**

Un método simple sería probar todos los ciclos posibles, encontrar la longitud de cada uno y luego elegir el más corto. Pero vamos a ver cuántos posibles caminos debe estudiar según el número de ciudades:

	3 ciudades	**4 ciudades**	**n ciudades**
Número de ciclos posibles	$\frac{2.1}{2}=1$	$\frac{3.2.1}{2}=3$	$\frac{(n-1)!}{2}$

Calcula cuántos posibles ciclos hay si n es 5, 10 Y 15

Para 5 son 12 ciclos, para 10 son 181.440 ciclos o rutas y para 15 son 43.589.145.600 rutas. Como ves el número rutas posibles crece muy muy rápido.

El TSP está catalogado dentro de los problemas de mayor complejidad, se llama problema NP Completo, de hecho aún no se ha encontrado ningún método capaz de resolverlo en un tiempo eficiente. Tanto es así, que el Instituto Clay de Matemáticas, CMI, fundación sin ánimo de lucro de Cambridge, Massachusetts, desde el año 2000, ofrece un premio de millón de dólares para la primera persona que logre encontrar un algoritmo que lo resuelva en un tiempo eficiente

Lo que hacen **las empresas de logística es diseñar buenas rutas en un tiempo razonable** pero no saben si hay alguna ruta mejor.

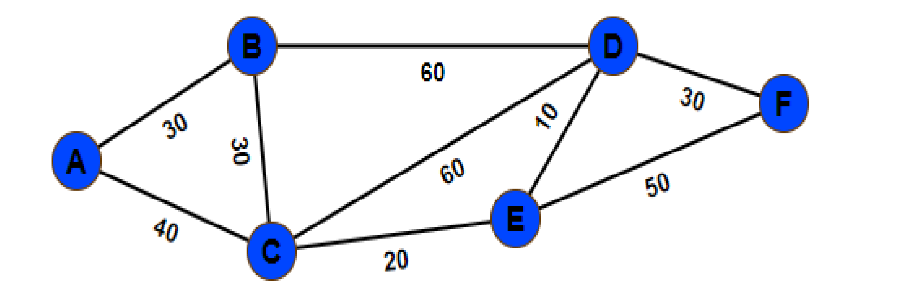
Visualiza el video "El problema del viajante"

2.5.3 EL PROBLEMA DEL CAMINO MÍNIMO

Hay otro tipo **de problemas en los que nos interesa encontrar caminos, no ciclos, de longitud mínima que unan un vértice inicial y otro final y para este tipo de problemas sí que hay algoritmos** que los resuelven en un tiempo eficiente**.** Esto es muy importante de cara a planificar rutas, pero hay que tener en cuenta que **hay que incluir información adicional a nuestro grafo**, puesto que para encontrar la ruta más corta entre dos ciudades, **debemos saber la distancia que separa a unas de otras.**

Para ello añadiremos pesos a las aristas, en este caso será la distancia entre dos ciudades.

Imagina que vives en el en pueblo A y quieres llegar al pueblo D por el camino más corto. En las aristas se indica la distancia en kilómetros entre los diferentes pueblos por los que vas pasando. **Encuentra dos o tres caminos diferentes para ir de A a D**



A→B→C→D

A→E→F→D

En este ejemplo es sencillo localizar todos los caminos y escoger el de distancia mínima, pero imagina que en lugar de haber 6 pueblos, hay 20 o 30… O imagina un repartidor de paquetería que debe recorrer 300 portales a lo largo del día para realizar el reparto. Sabemos que no hay una solución eficiente para el problema del viajante o TSP**, en cambio para el problema del camino mínimo sí que existen algoritmos eficientes que calculan cual es el camino de longitud mínma.**

Edsger W. Dijkstra fue un matemático y físico de los Paises Bajos y fue uno de los mayores diseñadores de software de su época, Entre sus contribuciones a las ciencias de la computación está la solución del problema del camino más corto conocida como el algoritmo de Dijkstra o algoritmos de caminos mínimos.

Veamos el algoritmo de Dijkstra:

1. Creamos una tabla con los vértices en la primera fila y en la segunda fila asignamos a todas las distancias valor infinito salvo el vértice inicial que tendrá una distacia acumulada de 0 Km.

A	B	C	D	E	F
(0,A)	∞	∞	∞	∞	∞

2. Se toma como vértice actual el que tenga menor distancia acumulada y se marca con * como vértice visitado. En todos los vértices adyacentes no visitados, actualizamos la distancia recorrida sumando el peso de la arista que va del vértice actual hasta el adyacente, siempre que esta distancia sea menor que la distancia almacenada en ese vértice

A	B	C	D	E	F
*	(30,A)	(40,A)	∞	∞	∞

3. Se repite el proceso del paso 2 mientras existan vértices que no hayamos visitado.

A	B	C	D	E	F
*	*	(40,A)	(90,B)	∞	∞

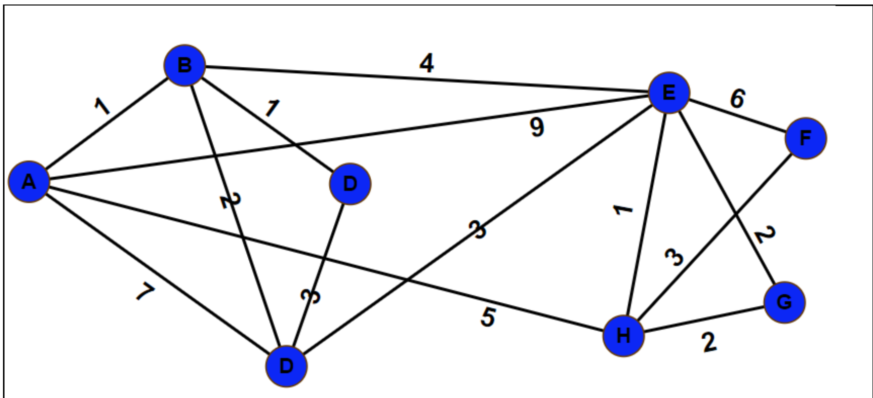
A	B	C	D	E	F
*	*	*	(90,B)	(60,C)	∞

A	B	C	D	E	F
*	*	*	(70,E)	*	(110,E)

A	B	C	D	E	F
*	*	*	*	*	(100,D)

Así la ruta más corta es de 100 Km y podemos deshacer el camino desde F hasta llegar a A
A F hemos llegado desde D, a D hemos llegado desde E, a E hemos llegado desde C y a C hemos llegado desde A. El camino de longitud mínimo es A→C→E→ D→F

Utilizando el algoritmo de Dijkstra, halla para el siguiente grafo el camino mínimo entre A y G



El camino más corto mide 7.

Este es uno A – B – E – G

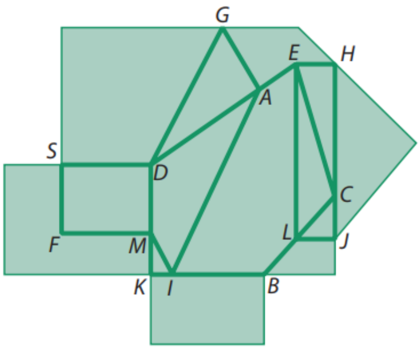
Este es otro A – H – G

2.6 ACTIVIDADES Y SITUACIONES PARA SEGUIR PRACTICANDO

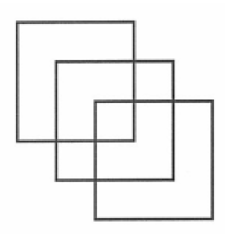
1. Probar que el número de ciclos hamiltonianos de K_n con n mayor o igual que 3 es $\frac{(n-1)!}{2}$

Fijado un vértice cualquiera, da lo mismo cual elijamos ya que es un ciclo, hay n-1 posibilidades para elegir el siguiente, luego n-2 posiblidades para el siguiente y así sucesivamente. Por lo que tendremos (n-1)(n-2)…3.2.1)= (n-1)! Pero al no ser dirigido el grafo, es lo mismo el ciclo a,b,c,d,a que el a, d, c, b, a, luego hay que dividir para 2

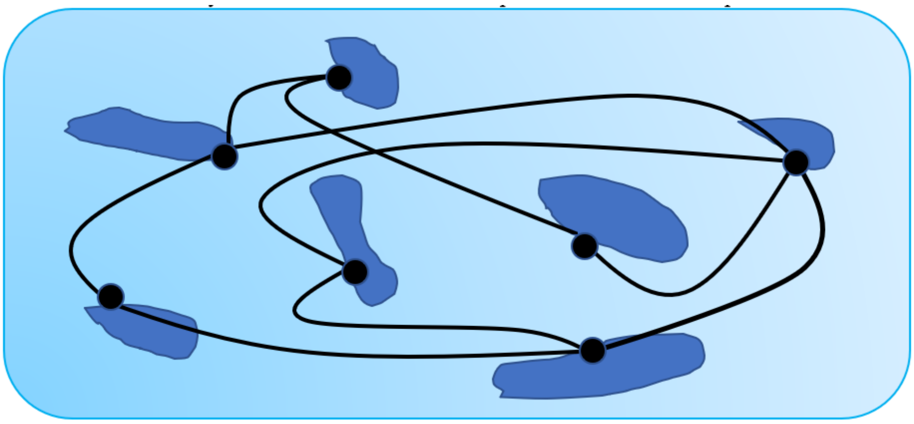
2. En procesos de fabricación donde se corta una pieza de metal con una antorcha mecánica, hay que reducir el número de veces que se enciende y apaga la antorcha, por lo que es deseable hacer el corte de forma continua. Para mayor eficiencia, la antorcha no debe pasar por un borde que ya haya sido cortado. Encuentra una manera de hacer todos los cortes indicados en la pieza de metal, de modo que comiences y termines en el punto S y se cumplan las condiciones. *(Problema adaptado de Vertex-Edge Graphs de Ramsden Stuart)*



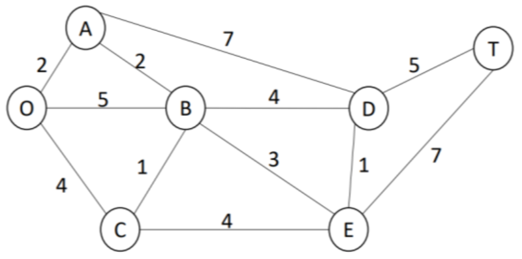
3. ¿El grafo de los puentes de Koninsberg es hamiltoniano?
4. Lewis Carrol, autor del libro Alicia en el país de las maravillas, le propuso a su amiga, Isabel Standem en una carta del 21 de agosto de 1869, dibujar estos tres cuadrados sin levantar el lápiz del papel y pasando por todas las lineas una sola vez. Encuentra una solución para este acertijo utilizando grafos.



5. En la figura mostramos un archipielago con siete islas, cada una de ellas tiene un embarcadero también mostramos las rutas marítimas que hay entre ellas.¿Podemos elegir una isla, recorrerlas todas una única vez y volver a la isla incial? Si es posible indica como se puede hacer. (*Problema adaptado de Matemáticas generales 1º de Bachillerato.Oxford University Press)*



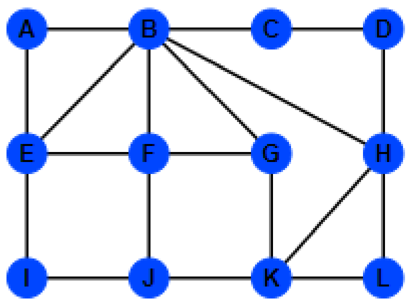
6. En este parque natural hay un pequeño tren turístico para los visitantes que tiene las siugienes paradas que ves en la imagen. ¿Qué ruta desde la entrada del parque O hasta el mirador principal T tiene la distancia total más corta?



O	A	B	C	D	E	T
(0,O)	∞	∞	∞	∞	∞	∞
*	(2,O)	(5,O)	(4,O)	∞	∞	∞
*	*	(4,A)	(4,O)	(9,A)	∞	∞
*	*	(4,A)	*	(8,B)	∞	∞
*	*	*	*	(8,B)	(7,B)	∞
*	*	*	*	(8,B)	*	(14,E)
*	*	*	*	*	*	(13,D)

La distancia es 13 y el camino recorrido es O→A →B→ D→ T

7. Busca en el siguiente grafo un posible camino de Hamilton y un ciclo de Hamilton. *(Problema recuperado de Revuela.Matemáticas generales 1º de Bachillerato.SM)*



El camino A,B,C,D,H,L, K, J,I,E, F, G es un camino de Hamilton. Para hallar un ciclo hamiltoniano suele ser recomendable escoger un vértice con mayor numero de aristas ya que da más libertad para buscar un camino recomenta B, C, D, H, L, K, G,F,J,I, E, A, B

El segundo grafo no puede ser hamiltoniano, precisamente porque ya hemos llegado al punto naranja a través de las aristas 1 y 2 que obligatoriamente deben pertenecer al ciclo, ya no podemos utilizar ninguna de las aristas 3 o 4 para salir del punto naranja.

8. A continuación te mostramos 7 estaciones de metro y el tiempo que se tarda en ir de una estación a otra. Busca el camino más rápido para ir de Gran Via a Ermita.

Gran Vía→ Sol 2’

Gran Vía→Tribunal 3’

Sol→Tirso de Molina 5’

Sol→Tacuba 4’

Tribunal→Tacuba 3’

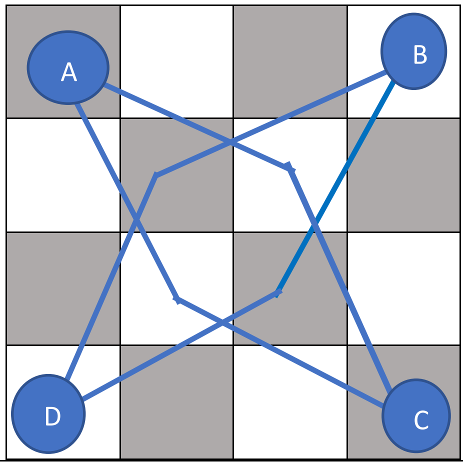
Tirso de Molina→Ermita 4’

Tacuba→Ermita 4’

Tacuba→Allende 2’

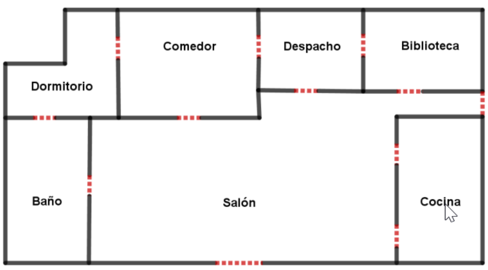
Allende→Ermita 2’

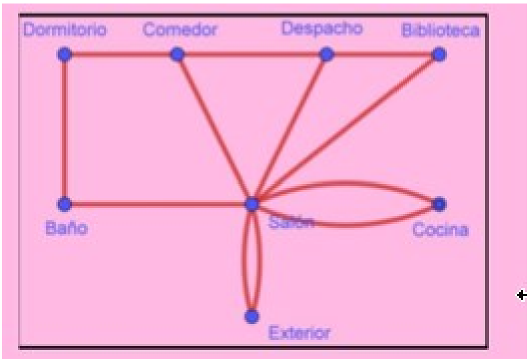
9. Ajedrez y grafos: El problema del caballo es un antiguo problema matemático en el que se pide que, teniendo un tablero y un caballo de ajedrez colocado en una posición cualquiera, el caballo pase por todas las casillas y una sola vez. Se han encontrado muchas soluciones a este problema y de hecho no se sabe cuantas tiene. Pero en un tablero 4x4 este problema no tiene solución. Demuestralo utilizando los grafos.



Si nos fijamos en los vértices A y C tienen grado 2, luego sus dos aristas deberán estar en el ciclo hamiltoniano, eso obliga a que esté el ciclo A, B,C, y D con lo cual va a ser imposible encontrar un ciclo que contenga a A, B, C y D

10. En la siguiente imagen mostramos el plano de una casa. Si te encontrases en el comedor, ¿podrías pasear, sin salir de la casa, pasando por todas las puertas una sola vez? ¿Y si te encontrases en el salón? ¿Habrá alguna habitación de la que puedas partir para pasar una sola vez por todas las puertas de la casa, incluyendo las del exterior? (*Problema extraido de "La tela de Araña" Autor Rafael Losada)*





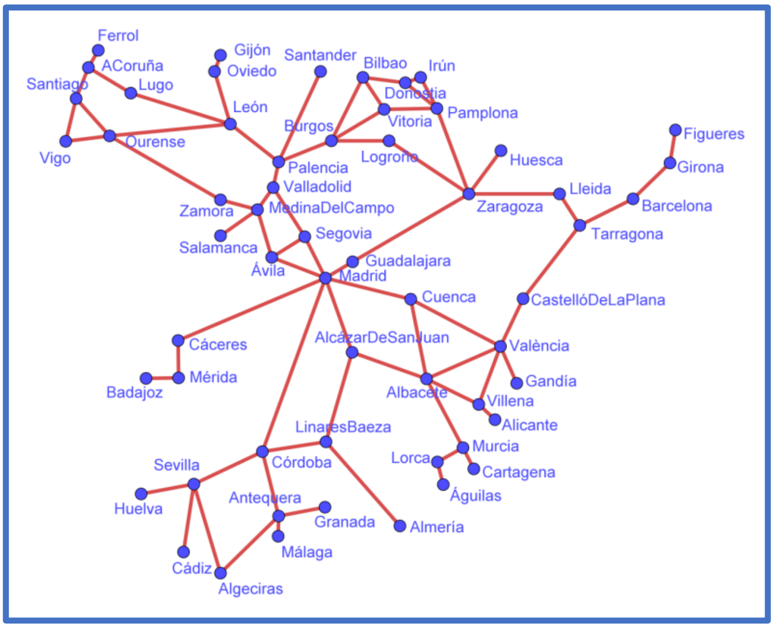
11. Dibuja ahora el plano de una casa de modo que puedas pasar por todas las puertas sin repetir ninguna y también se puedan recorrer todas las habitaciones sin que ser repita ninguna.

12. La siguiente imagen es un esquema de un mapa de líneas de RENFE de largo recorrido. *(Problema extraido de "La tela de Araña" Autor Rafael Losada)*

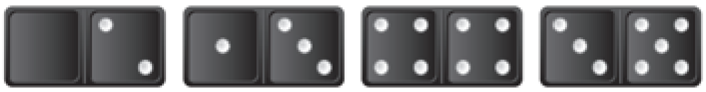
a)Elige 8 estaciones conectadas entre sí de forma que puedas salir y volver a una de ellas pasando por todas las demás, sin repetir nunca un tramo de recorrido. (Paseo con retorno.)

b) Elige 8 estaciones conectadas entre sí de forma que puedas salir de una y acabar en otra distinta después de pasar por todas las demás, sin repetir nunca un tramo de recorrido.

c) Elige 8 estaciones conectadas entre sí de forma que desde ninguna de ellas se pueda realizar todo el recorrido sin repetir, forzosamente, alguno de los tramos ya recorridos.

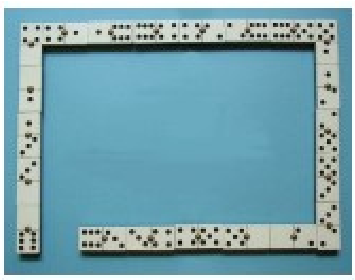
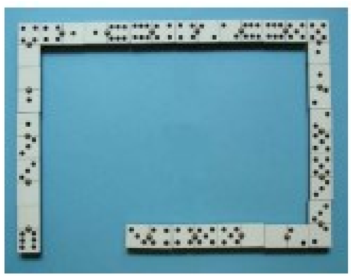


13. El juego de dominó estandar se compone de fichas rectangulares divididas por la mitad. En cada parte puede haber de 0 a 6 puntos. ¿Es posible formar un anillo con todas las fichas colocadas una al lado de la otra según la regla anterior? ¿Y si en lugar de tener de 0 a 6 puntos el juego tuviera fichas de 0 a 9 putnos?

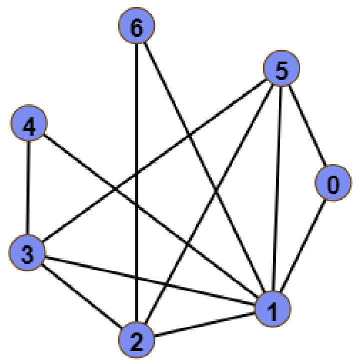
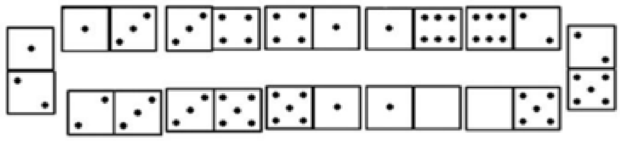


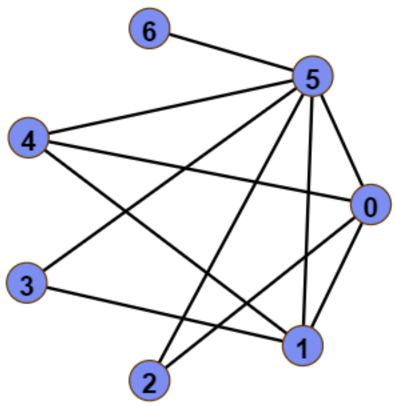
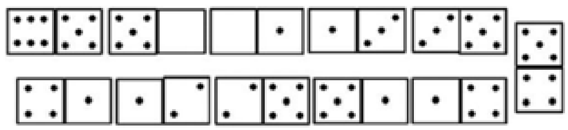
K7 y K10 en el caso de K7 los grados son 6, pares es posible encontrar un ciclo euleriano. En el caso de K10 los grados son impares, 9, no es posible encontrar ciclo euleriano.

14. Qué condiciones que debe cumplir a priori un conjunto cualquiera de fichas de dominó para que, si jugamos adecuadamente, utilicemos todas las fichas. Distinguiremos dos casos: cuando la partida se "abre" y se "cierra" con la misma cifra (partida perfecta, izquierda) y cuando se "abre" y se "cierra" con cifras distintas (partida semiperfecta, derecha).

Si modelizamos con Teoría de grafos el problema, los vértices serían las cifras de las fichas: 0, 1, 2, 3, 4, 5, y 6. Las aristas serían las fichas del dominó del conjunto escogido. Encontrar un conjunto de fichas en las que la partida sea perfecta es equivalente a encontrar un grafo euleriano, y si la partida es semiperfecta, será equivalente a encontrar un grafo semieuleriano.

	*El grafo de la imagen tiene todos sus vértices con grado par, luego es euleriano y existe un ciclo que pasa por todas las aristas (fichas) sin repetirlas, empezando y acabando por la misma ficha.* 

	*El grafo de la imagen tiene todos sus vértices con grado par, excepto el 6 y el 4, luego es semieuleriano y existe un camino que pasa por todas las aristas (fichas) sin repetirlas, empezando por la arista 6→5y acabando por la arista 1→4*  .

3. VIDEOS RECOMENDADOS

Titulo	Dirección	
El espejismo de la mayoría	https://youtu.be/_5wFActPCsI	
6 grados de separación	https://youtu.be/LtH1Ecz_aHw	
Teorema de los 4 colores	https://youtu.be/Rv6r5K9con8	
Puentes de Konisberg	https://youtu.be/m_IT0RNZRw8	
El problema del viajante	https://youtu.be/E3yHtJSDNNY	

4. SOFTWARE EN LINEA

https://www.yworks.com/yed-live/

https://graphonline.ru/es/

https://g.ivank.net/

5. BIBLIOGRAFÍA

Calvo, N., Ramírez, A. y Rey, M. Matemáticas generales 1º de Bachillerato. Oxford University Press

Ferrarello, D., Gionfriddo, M., Grasso, F., & Mammana, M. F. (2022, August 7). *Graph theory and combinatorial calculus: An early approach to enhance robust understanding - ZDM – mathematics education*. SpringerLink. https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-022-01407-w

González, A., Gallego-Sánchez, I., Gavilán-Izquierdo, J. M., & Puertas, M. L. (2021). *Characterizing levels of reasoning in graph theory*. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education. https://doi.org/10.29333/ejmste/11020

Gutiérrez Mazorra, E. (2020). *Actividades Introductorias de los Grafos en las* matemáticas de secundaria. Recuperado de https://riubu.ubu.es/handle/10259/5738

Grima, C., Márquez, A. y Fernández, E. (2022). Revuela, matemáticas generales 1º de Bachillerato. SM

Hart, E. W. Discrete mathematics for all. Recuperado de https://www.lamath.org/journal/vol4no2/Guest_Editorial.pdf

Hart, E. W., & Martin, W. G. (2018). Discrete mathematics is essential mathematics in a 21st century school curriculum. *Teaching and learning discrete mathematics worldwide: Curriculum and research*, 3-19.

Lorenzo Vaquero, P. (2019). Propuesta de Inclusión de contenidos de Teoría de números y matemática discreta en la Enseñanza Secundaria con un enfoque visual. Recuperado de : https://uvadoc.uva.es/handle/10324/38508

Pascual Ortigosa, P. (2022). Teoría de grafos. En D. J. Rodríguez Luis & J. M. Ribera Puchades (eds.), *Desarrollo de destrezas en resolución de problemas de olimpiadas matemáticas* (pp. 65-84). Universidad de La Rioja.

Robinson, Laura Ann, "Graph Theory for the Middle School." (2006). *Electronic Theses and Dissertations.* Paper 2226. https://dc.etsu.edu/etd/2226

Ramsden Stuart. Vertex-Edge Graphs. Recuperado de https://www.wsfcs.k12.nc.us/cms/lib/NC01001395/Centricity/Domain/1707/INTERATED%20unit04.pdf