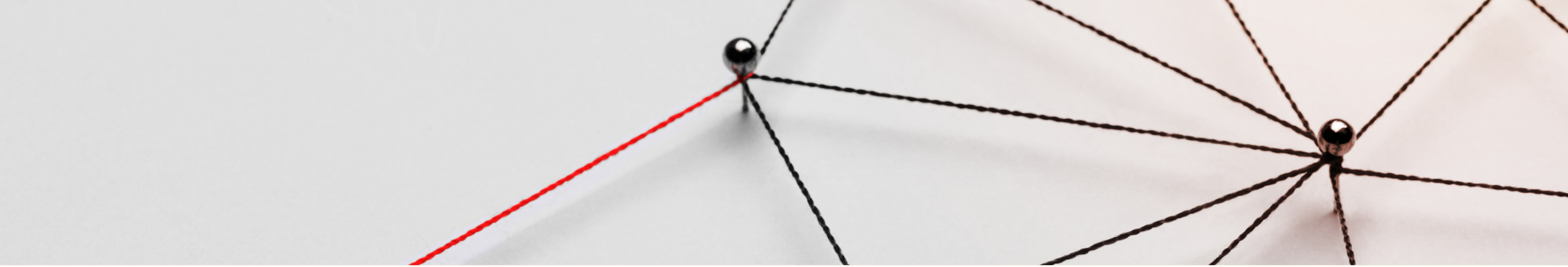
Introducción de los enteros a través del álgebra

Pablo Mateo
IES El Portillo
mateosegura@ieselportillo.com

24 y 31 de enero de 2024

Planning

- Cuestión inicial
- Obstáculos en la introducción de los enteros
- El paso de la aritmética al álgebra
- La propuesta didáctica de Eva Cid



Cuestión inicial

¿En qué orden se debería introducir los siguientes contenidos?

ENTEROS · NATURALES · RACIONALES · ÁLGEBRA

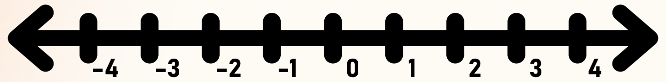
Ve a **menti.com** e introduce
el código ...

Obstáculos en la introducción de los enteros

Históricamente

La aceptación de los números negativos fue un proceso muy lento.

Se sabía cómo operar con “sustraendos” pero no su naturaleza como números.



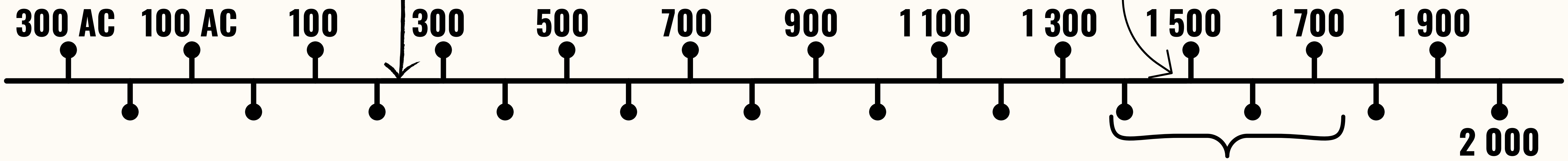
Su aceptación supuso un cambio conceptual en el significado de número.

Primera formulación de la regla de signos

Diofanto, s. III

Primera aparición de un número negativo aislado, aceptado como solución de una ecuación.

Chuquet, 1484



La mayoría de los matemáticos no los aceptan como números ni tampoco como soluciones de las ecuaciones, llamándoles "números absurdos", "ficticios" o "raíces falsas" de las ecuaciones.

Wallis, en su *Arithmetica Infinitorum* de 1655, decía que, dado que la razón 1 : 0 es infinita y que −2 es menor que 0, la razón 1 : −2 tenía que ser mayor que infinito.

Eva Cid (2016).

Carnot en su *Géométrie de position* (1803)

Nada es más simple que la noción de cantidades negativas precedidas por cantidades positivas más grandes que ellas; pero en álgebra nos encontramos a cada paso con **expresiones de formas negativas aisladas** y cuando se quiere conocer con precisión el sentido de estas expresiones faltan principios claros, porque éstas son el resultado de operaciones que no son, en sé mismas, claras ni ejecutables más que para las cantidades positivas o, más bien, absolutas (pp. 2-3).

Para obtener realmente una cantidad negativa aislada será necesario **sustraer una cantidad efectiva de cero**, quitar algo de nada: operación imposible. ¿Cómo concebir entonces una cantidad negativa aislada? (p. 3)

[...] Teniendo el derecho de omitir en un cálculo las cantidades nulas, por comparación con aquellas que no lo son, con más razón deberíamos tener el derecho de omitir aquellas que son menores que cero, es decir, las cantidades negativas, lo que es ciertamente falso: por tanto, las cantidades negativas no son **menores que cero** (p. 9)

Una multitud de paradojas o, más bien, de absurdos palpables resultará de la misma noción; por ejemplo, -3 será menor que 2; sin embargo, $(-3)^2$ será más grande que 2^2, es decir, que entre dos cantidades desiguales el cuadrado de la más grande será menor que el cuadrado de la más pequeña, lo que choca con todas las ideas claras que podamos hacernos sobre la cantidad (p. 9)

Principales dificultades

La concepción de número como resultado de una medida.

Asociaciones arraigadas (relacionadas con la medida):

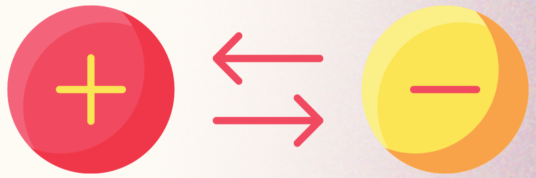
Sumar – "Añadir" · Restar – "Disminuir"

"No se puede restar una cantidad mayor"

"No puede haber una cantidad que sea menos que nada"

Ambigüedad de los dos ceros.

En el ámbito escolar actual



La introducción de los enteros se suele hacer a través de modelos concretos.

Los números enteros se manejan como si fuesen naturales.

$$(+3) - (-4) = 3 + 4 = 7$$

Se introducen a la vez muchas reglas sintácticas nuevas.

Modelos concretos

Deudas y haberes

$(-7) + (+5) = -2$

"Si juntamos una deuda de 7 euros y un haber de 5 euros, eso equivale a una deuda de 2 euros"

Desplazamiento

$(-7) + (+5) = -2$

"Si empezamos en −7 y nos movemos hacia la derecha 5 unidades llegamos al −2"

Termómetro

Ascensor

A.C - D.C.

Altitud

Eva Cid y Pilar Bolea (2007)

Modelos concretos

Deudas y haberes

$-10 > -5$

"Porque una deuda de 10 euros es mayor que una deuda de 5 euros"

Desplazamiento

$(-6) - (-2) = +4$

"Porque entre 6 grados bajo cero y 2 grados bajo cero hay 4 grados de diferencia y 4 es lo mismo que +4"

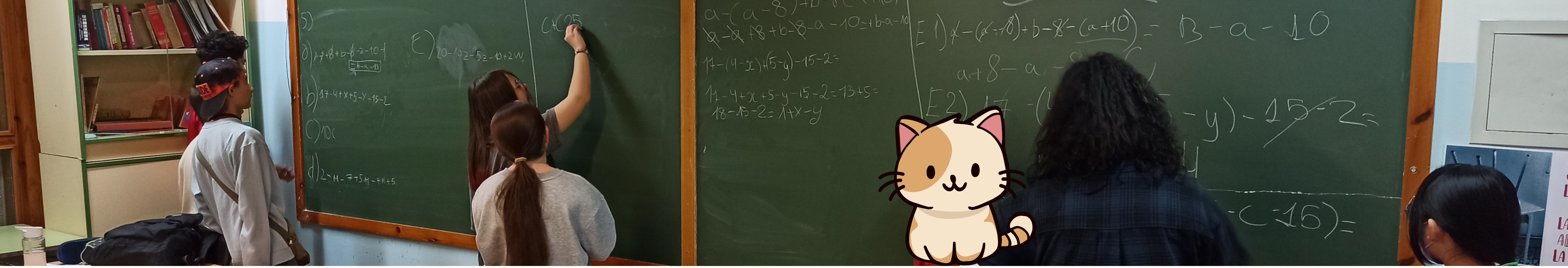
Eva Cid y Pilar Bolea (2007)

Conclusiones

La aritmética no es un buen lugar para iniciar la enseñanza de los números negativos. La permanente contextualización numérica no permite justificar la necesidad de utilizar los números negativos.

La introducción escolar actual fomenta la concepción de que el número sólo puede entenderse como resultado de una medida.

Los modelos concretos pueden contribuir a que el alumnado adquieran creencias erróneas sobre los números negativos y sus operaciones



El paso de la aritmética al álgebra

Operaciones

QUEHACER ARITMÉTICO	QUEHACER ALGEBRAICO
• Entre números (sin signo) que dan siempre como resultado otro número.	• Hay operaciones que no son directamente efectuables.
• Se presentan una por una y se suelen escribir por separado.	• Se ligan unas con otras, constituyendo una o varias expresiones algebraicas.
• Las reglas de escritura son pocas y sencillas.	• Sintaxis mucho más compleja.
• Los signos "+" y "−" indican operaciones binarias entre números.	• Los signos "+" y "−" tienen distintos significados.

Operaciones

QUEHACER ARITMÉTICO	QUEHACER ALGEBRAICO
• La resta es una operación prioritariamente ligada a la acción física de quitar. De ahí su nombre de “resta” o “sustracción”.	• La resta es una operación prioritariamente ligada a la acción física de comparar cantidades. De ahí su nombre de “diferencia”.
• Las técnicas operacionales son algorítmicas.	• Las técnicas operacionales no son algorítmicas, exigen reflexión y toma de decisiones.

El signo "="

QUEHACER ARITMÉTICO

- Indica que la operación de la izquierda debe ser efectuada y el resultado colocado a la derecha.

- Existen tipos de igualdades muy limitados.

$$12{,}45 + 7{,}07 = 19{,}52$$

QUEHACER ALGEBRAICO

- Establece una relación de equivalencia entre las expresiones situadas a los lados.

- Existen, al menos, dos tipos nuevos de igualdades: identidades y ecuaciones.

$7 \cdot 8 = 14 \cdot 4$ $\qquad$ $\frac{1}{3} = 0,33\ldots$

$x + 4 = 7$ $\qquad$ y = nº de libros de Paula

$y = mx + n$ $\qquad$ $2x\,(3y + 5) = 6xy + 10x$

“Confusiones” comunes

$\mathbf{453 + 213} = 666\ \mathbf{-\ 394} = 272\ \mathbf{+\ 100} = 372$

$\mathbf{3x + 4 = 5x} = 4 = 2x = 2 = x$

$\mathbf{2x(x - 3)+3} = 2x^2 - 6x + 3\ \mathbf{= 10}$

Resolución de problemas

QUEHACER ARITMÉTICO	QUEHACER ALGEBRAICO
• Dependencia permanentemente del contexto.	• Hay partes contextualizadas y partes descontextualizadas.
• El control de la validez de la resolución es fundamentalmente semántico.	• El control de validez en las fases descontextualizadas depende de las reglas sintácticas de escritura.
• En un problema aritmético se buscan soluciones numéricas.	• En un problema algebraico el tipo de soluciones se diversifica. Puede ser un número, una fórmula, una relación, una demostración, etc.

Resolución de problemas

QUEHACER ARITMÉTICO	QUEHACER ALGEBRAICO
• Las letras son abreviaturas de objetos pertenecientes al contexto del problema o de unidades de medida.	• Las letras indican números descontextualizados que pueden ser variables, incógnitas, parámetros, constantes o indeterminadas.

Un problema puede ser más aritmético o más algebraico.

- Podemos trabajar el pensamiento algebraico en edades tempranas.

$$145 - 4 + 3 - 7 + 8 = \_\_\_$$

$$12 + \_\_\_ = 20$$

Hay problemas que admiten resoluciones aritmética y algebraica.

Un ejemplo

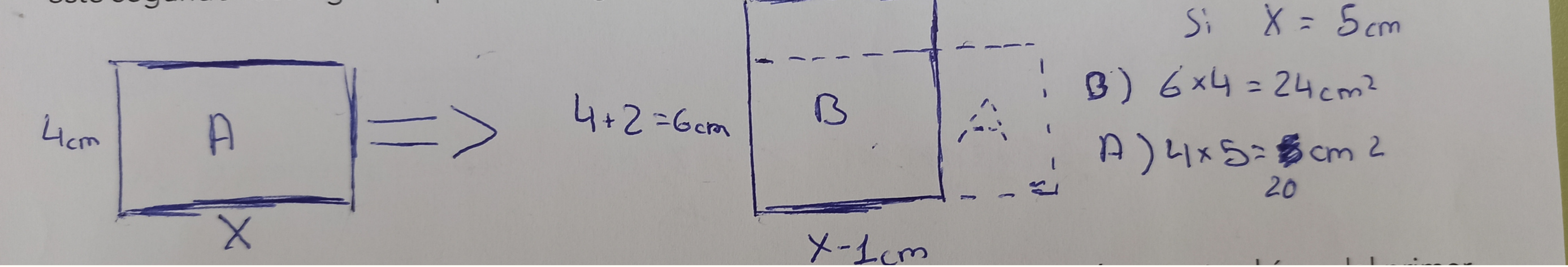
Resolvamos el siguiente problema de dos formas distintas: usando el pensamiento aritmético y usando el pensamiento algebraico.

Piensa en dos fracciones diferentes. Demuestra que la fracción que tiene como numerador la suma de los numeradores y como denominador la suma de los denominadores está siempre en medio de las dos fracciones

Reconociendo el pensamiento aritmético

$$\frac{3}{7} : \frac{10}{7} = \frac{3 \cdot 7}{7 \cdot 10} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{3}{7} : \frac{10}{7} = \frac{21}{70} = \frac{3}{10}$$



La propuesta didáctica

de Eva Cid

La propuesta de Eva Cid

Consiste en 8 sesiones (se recomienda hacer las cinco primeras en 1º de ESO y las tres últimas en 2º de ESO).

Se comienza trabajando con expresiones algebraicas.
Los números enteros aparecen y se formalizan al final.

Sigue la metodología de la enseñanza a través de la resolución de problemas (sin explicaciones previas).

Sesión 1	• Cómo **construir** expresiones algebraicas
Sesión 2	• Cómo **simplificar** expresiones algebraicas
Sesión 3	• Cómo **comparar** expresiones algebraicas
Sesión 4	• Cómo **encontrar la diferencia entre** expresiones algebraicas
Sesión 5	• Cómo **multiplicar** expresiones algebraicas
Sesión 6	• Cómo **hacer operaciones entre** números enteros
Sesión 7	• Cómo **ordenar y representar** números enteros
Sesión 8	• Cómo **encontrar los valores** que hacen que una relación entre expresiones algebraicas sea cierta.

Situación inicial

Eva y Bernardo juegan a un juego de cartas en el que se apuestan fichas de dos colores: rojas y blancas. Las fichas de un mismo color valen el mismo número de puntos. Al acabar la partida Eva tiene 20 fichas blancas y 90 rojas, y Bernardo tiene 40 fichas blancas y 60 rojas.

Indica quién gana la partida en los casos siguientes:

- Las fichas blancas valen el doble que las rojas.
- Las fichas blancas valen un punto menos que las rojas.

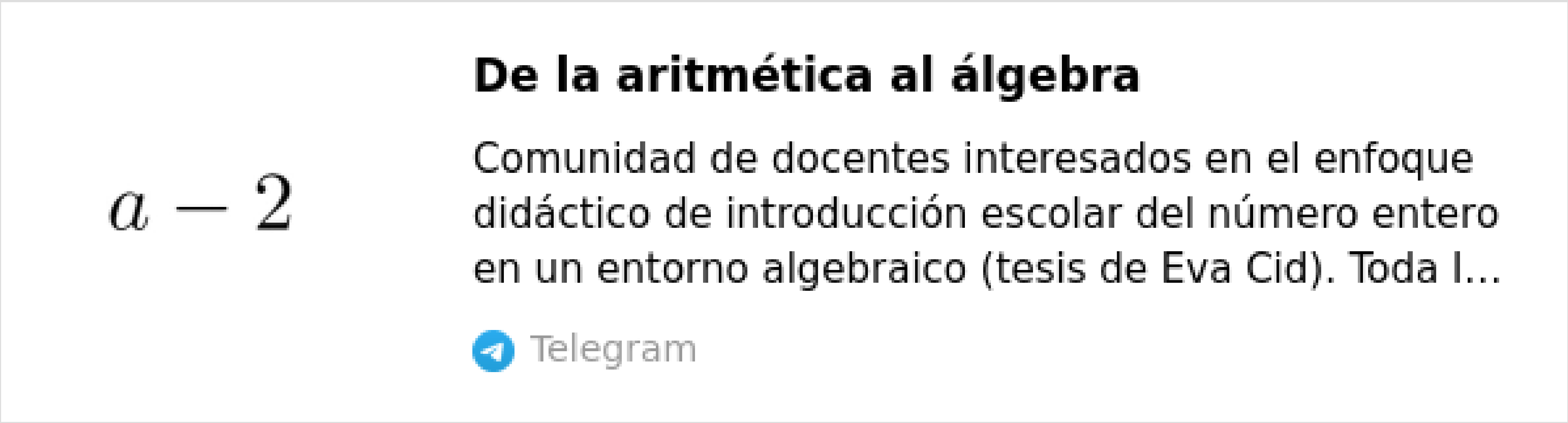
¿Qué relación hay entre los puntos de las fichas blancas y las rojas si Eva y Bernardo empatan (es decir, tienen el mismo número de puntos)?

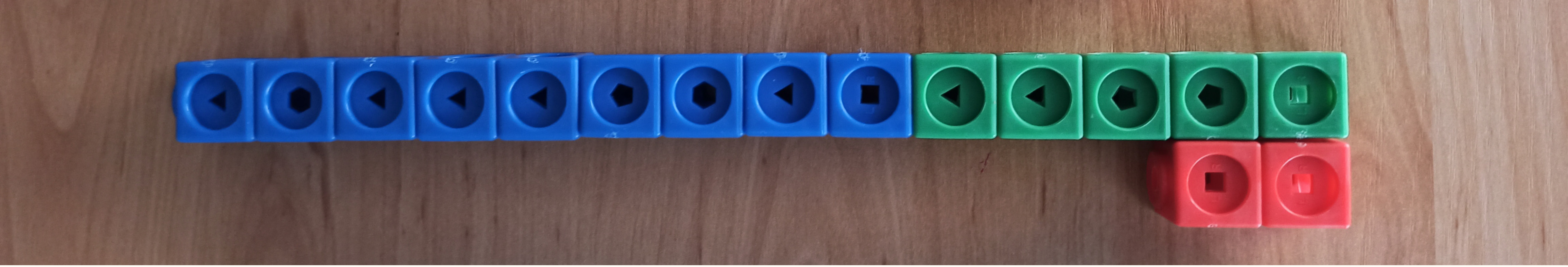
Acceso a la propuesta

Se puede acceder a la propuesta acualizada aquí:

[De la aritmética al álgebra]

Acceso al grupo de telegram (pinchando en la imagen):





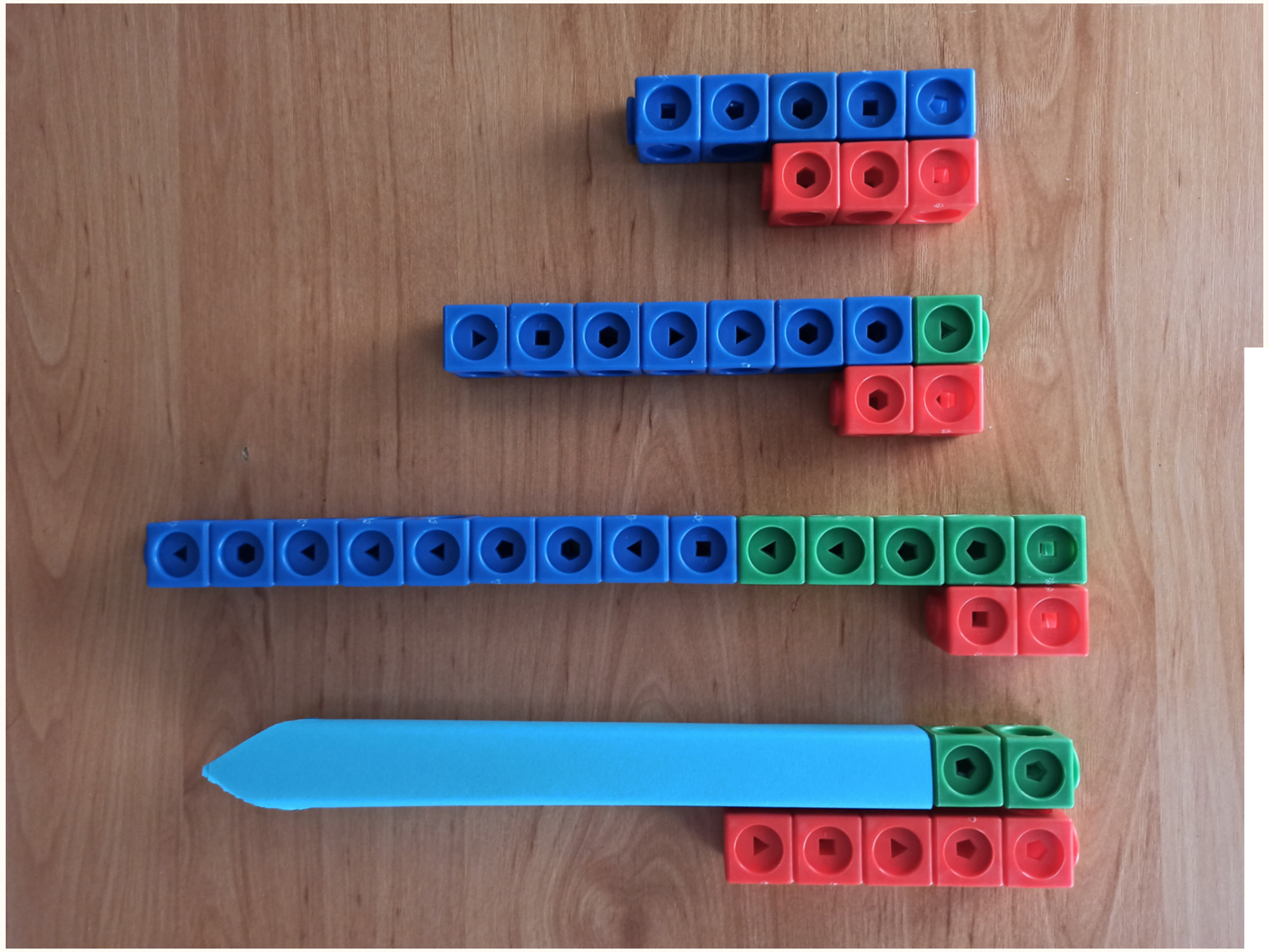
Una variante de la propuesta

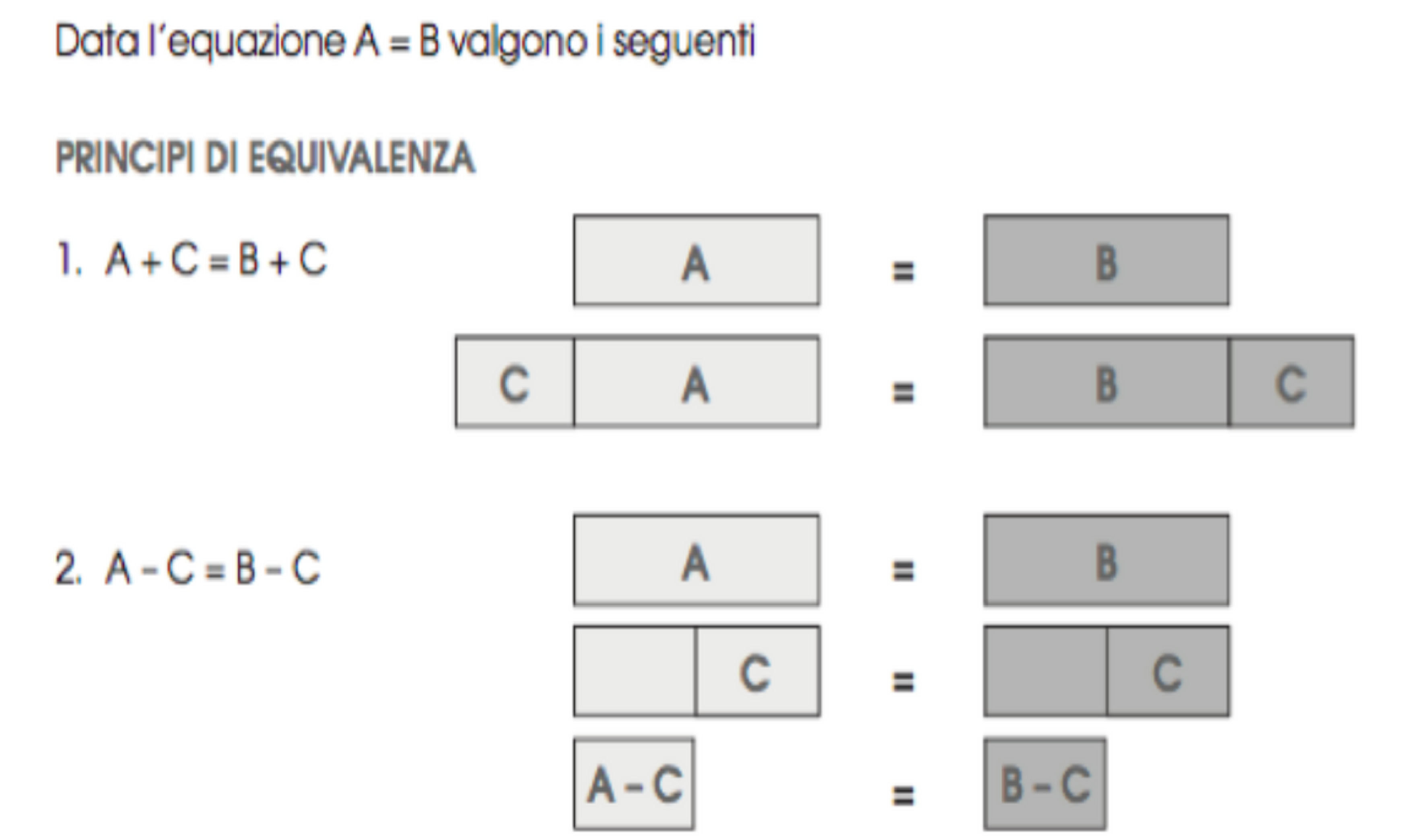
Una variante de la propuesta

Modificación de las dos primeras sesiones.

Introducción del lenguaje algebraico en un entorno geométrico, y usando un material que favorece la comprensión por su potencial visual: los policubos.

Publicación en Entorno Abierto (comunicación en la V JEMA).





Método propuesto por Elisabeta Monari

1. Representa con policubos los siguientes enunciados:

a) Un muro mide 5 metros de largo. Por una tormenta se destruyen 2 metros de longitud y, después, se derrumba 1 metro más.

b) La valla de mi jardín mide 7 metros de largo. He añadido 1 metro a la valla y después, he quitado 2 metros para hacer una puerta.

c) Una verja mide 9 metros de largo. Trabajo durante el verano para que sea 5 metros más larga, pero en invierno, se destruyen 2 metros de longitud por una tormenta.

d) En mi casa del pueblo hay un muro. Durante el invierno construyo 2 metros más de largo y en verano derrumbo 5 metros de largo de dicho muro para hacer un camino.

2. ¿Sería posible….

en un muro de 5 metros de largo, destruir primero 3 metros y luego destruir otros 3 metros?

en un muro de 6 metros de largo, destruir primero 2 metros y luego destruir 4 metros?

en un muro de 8 metros de largo, destruir 8 metros y construir 4 metros de largo?

en un muro, destruir 5 metros y construir 2 metros de largo?

3. Con los policubos, construye un rectángulo de las medidas que queráis y seguid las siguientes instrucciones:

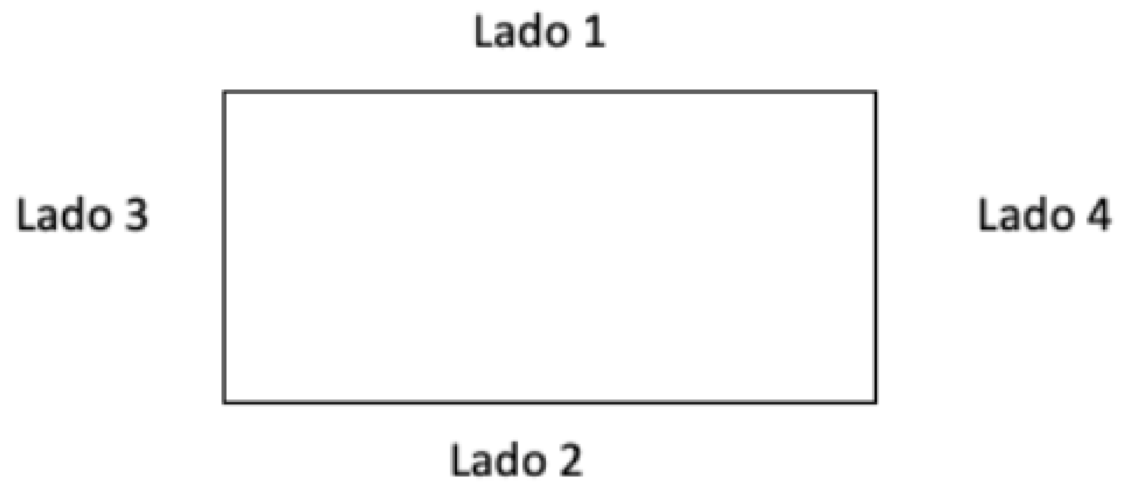
a) Aumentamos la dimensión del lado inferior del rectángulo en 1 policubo. Realizamos las acciones pertinentes para que siga siendo un rectángulo.

b) Aumentamos la dimensión del lado derecho del rectángulo en 1 policubo. Realizamos las acciones pertinentes para que siga siendo un rectángulo.

c) Aumentamos la dimensión del lado inferior del rectángulo en 3 policubos. Realizamos las acciones pertinentes para que siga siendo un rectángulo.

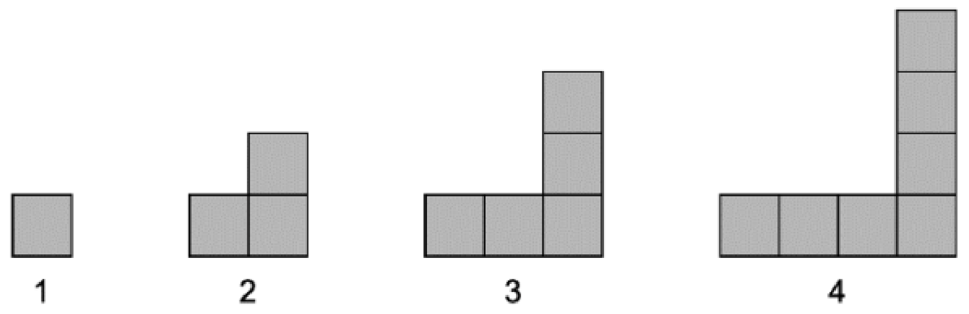
d) Quitamos 2 policubos del lado superior de nuestro rectángulo. Realizamos las acciones pertinentes para que siga siendo un rectángulo.

4. Continúa trabajando con los policubos y completa la siguiente tabla.



Caso	**Lado 1**	**Lado 2**	**Lado 3**	**Lado 4**	**Perímetro**
1	2	2	3	3	
2	2	2	3		10
3	3		4	4	
4	5		2		
5	3	3	3	3	
6	2	2			14
7	2	2			
8			3	3	
9					
10					10

5. Construye con policubos las siguientes figuras.

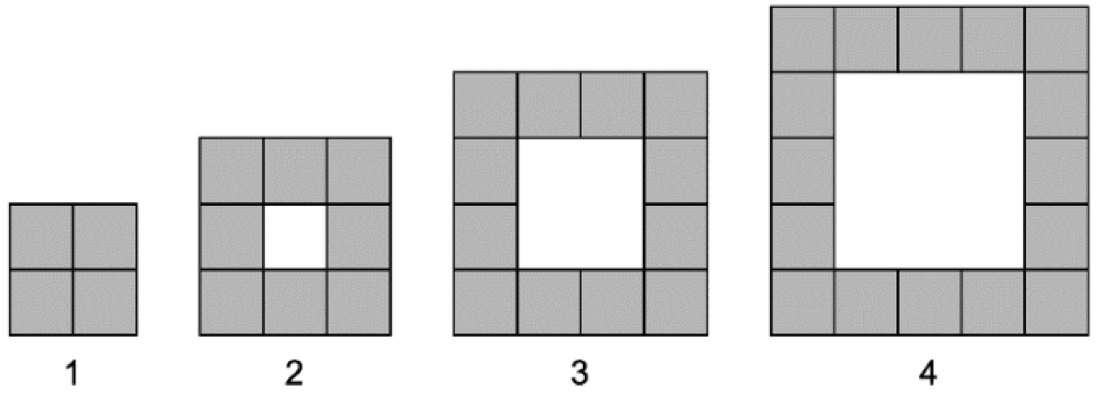


a) ¿Cuántos policubos se necesitan para formar la siguiente figura? ¿Y la figura 6? ¿Y la 10?

b) Observa lo que has hecho y completa la siguiente tabla.

Número fig.	1	2	3	4	5	6	10	215	
Policubos									

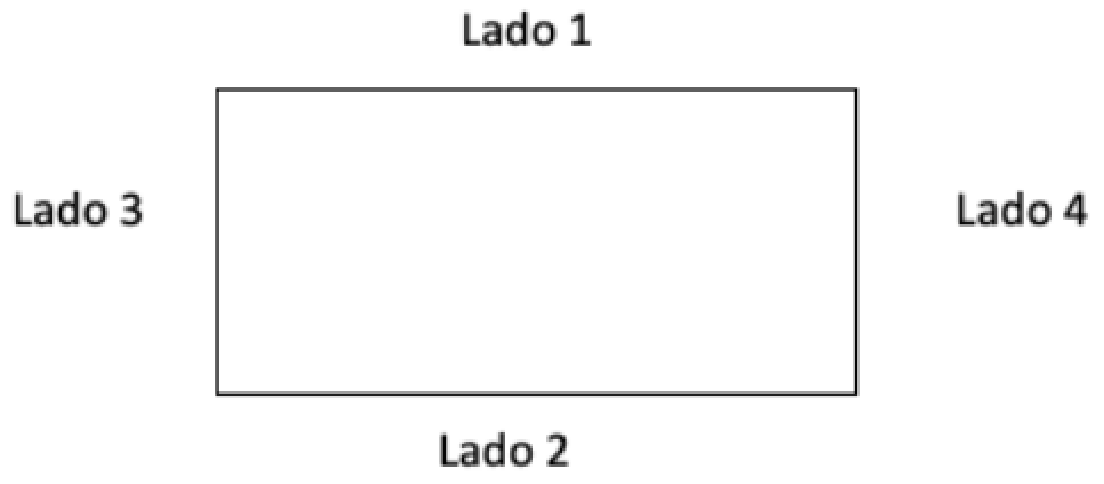
c) Con las figuras de policubos que has construido en el ejercicio anterior y, sin romper ni dividir ninguna, transformarlas en las siguientes figuras únicamente añadiendo policubos.



d) Completa la siguiente tabla.

Número fig.	1	2	3	4	5	6	10			
Pol. iniciales								27		
Pol. añadidos									51	
Pol. totales										

1. Continúa trabajando con los policubos y completa la siguiente tabla.



Caso	Lado 1	Lado 2	Lado 3	Lado 4	Área
1	5		2		
2	6		2		
3	5		3		
4	5				20
5	4		3		
6				5	
7		3			
8			7		
9					
10					10

2. a) En mi casa del pueblo hay un muro. Durante el invierno construyo 2 metros más de largo y en verano derrumbo 5 metros de largo de dicho muro para hacer un camino. ¿Cuánto mide el muro ahora?

b) Trabajo durante el verano para alargar una verja y que sea 5 metros más larga, pero en invierno se destruyen 2 metros de longitud por una tormenta. ¿Cuánto mide la verja ahora?

c) La valla de mi jardín mide 7 metros de largo. He añadido 1 metro a la valla y después, he quitado un trozo para hacer una puerta. ¿Cuánto mide ahora la valla?

3. Para cada una de las expresiones algebraicas siguientes, propón un problema que la tenga como solución. Escríbela lo más simplificada posible.

E1) $a + 5 + 8 - 6$

E2) $b - 6 - 10$

E3) $12 - a - 5$

Para terminar

En la primera sesión...

¿En qué orden se debería introducir los siguientes contenidos?

ENTEROS · NATURALES · RACIONALES · ÁLGEBRA

Ve a **menti.com** e introduce el código .....

Referencias

- Cid, E. y Bolea, P. (2007). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, 1, 575-594.

- Cid, E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos.* Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

¡Muchas gracias!

Pablo Mateo
IES El Portillo
mateosegura@ieselportillo.com

31 de enero de 2024