

INICIACIÓN A LOS NÚMEROS ENTEROS Y AL ÁLGEBRA

Materiales de clase para 1º de ESO

Eva Cid¹
Universidad de Zaragoza

CÓMO CONSTRUIR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. Laura se llevó sus cromos al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 cromos y en la segunda ganó 7. ¿Cuántos cromos le quedaron después de jugar?

2. Un tren sale de Barcelona con cierto número de pasajeros y llega a Girona después de hacer dos paradas. En la primera parada, bajan 15 y suben 12 pasajeros; en la segunda parada, bajan 38 y suben 42 pasajeros. ¿Con cuántos pasajeros llegó el tren a Girona?

3. Completa las tablas siguientes sobre el número de pasajeros del tren anterior.

Número de pasajeros que sale de Barcelona	Número de pasajeros que llega a Girona
427	
1582	
a	

Número de pasajero que sale de Barcelona	Número de pasajeros que llega a Girona
	45
	876
	c

4. a) María va de compras. Lleva 120 €. Compra primero un pantalón que le cuesta 40 € y después unos zapatos. Por último, compra un libro por 15 €. ¿Cuánto dinero le queda?

¹ Han colaborado en la elaboración de esta propuesta: Pablo Beltrán (Universidad de Zaragoza), Marianna Bosch (Universidad Ramón Llull) y Josep Gascón (Universidad Autónoma de Barcelona).

b) Si María nos dice que le han quedado 30€, ¿podemos averiguar cuánto le han costado los zapatos? ¿Y si le quedan 15 €? ¿Y si solo le quedan 5 €?

5. Un ganadero tiene vacas y ovejas. Las vacas paren 21 crías y las ovejas, 57. Además el ganadero vende 30 vacas y 70 ovejas. Completa la siguiente tabla en la que se proponen algunos casos particulares. Escribe el caso general al final, poniendo las fórmulas.

Nº inicial de vacas	Nº inicial de ovejas	Nº inicial de animales	Nº final de vacas	Nº final de ovejas	Nº final de animales
80	150				
			65	120	
50					
				90	

6. Para cada una de las expresiones algebraicas siguientes, propón un problema que la tenga como solución y escríbela lo más simplificada posible.

E1) $a + 5 + 8 - 6$

E2) $b - 6 - 10 - 4$

E3) $12 - a - 5$

CÓMO SIMPLIFICAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. Un chico, al hacer los deberes, tiene que simplificar unas expresiones algebraicas. Lo hace de la siguiente manera:

$$(a) \quad d - 7 - 4 + 10 = d - 3 + 10 = d - 13$$

$$(b) \quad 27 - q - 8 - 8 = 27 - q - 0 = 27 - q$$

$$(c) \quad 18 - 5 + x + 5 - 8 = 18 + x - 8 = 18 - 8 + x = 10 + x$$

¿Crees que el profesor le pondrá un bien?

2. Completa las siguientes frases:

Sumar 5 y sumar 2 es lo mismo que _____

Sumar 5 y restar 2 es lo mismo que _____

Restar 5 y sumar 2 es lo mismo que _____

Restar 5 y restar 2 es lo mismo que _____

3. En las siguientes expresiones, ¿cómo hay que escribir los signos que faltan para que la igualdad sea cierta?

$$10 + 5 + 2 = 10 _ _ 2 _ _ 5$$

$$10 + 5 - 2 = 10 _ _ 2 _ _ 5$$

$$10 - 5 + 2 = 10 _ _ 2 _ _ 5$$

$$10 - 5 - 2 = 10 _ _ 2 _ _ 5$$

4. Completa las siguientes frases:

Sumar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que _____ primero 2 y _____ después 5.

Sumar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que _____ primero 2 y _____ después 5.

Restar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que _____ primero 2 y _____ después 5.

Restar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que _____ primero 2 y _____ después 5.

5. Simplifica la siguiente expresión algebraica:

$$45 - f + g - 13 + 500 + f - 500 + 19 + 23 - 19$$

teniendo en cuenta que antes de empezar a operar debes leer toda la expresión y analizar qué operaciones conviene efectuar primero para que el cálculo resulte lo más sencillo posible. Por ejemplo, observa si un mismo número o letra aparece unas veces restando y otras sumando porque eso permite suprimirlo. Procura también realizar primero aquellas operaciones que dan lugar a números más sencillos y más fáciles de operar.

6. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, haciendo las operaciones de la manera más sencilla posible.

E1) $30 + w - 10 + 12 - v$

E2) $h - 25 - 25 + 50 - 7$

E3) $m - 45 + 44 - 17 + 18 + 27 - 3$

E4) $100 - a - b - c - 80 + 6$

E5) $p - 15 + 85 + 36 + 24 - 35 - 1$

E6) $100 - r - n + 48 - 99 - 18$

E7) $65 + 84 - 82 - 13 + 15 - 16 - 4$

7. a) Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, haciendo las operaciones de la manera más sencilla posible.

E1) $s + 72 - 67 + s + 67 - 48 - 72 - 5 - s + 50$

E2) $200 + n + m + n + m - 50 + m$

E3) $35 - a - a - a - a - a + 60$

E4) $3f + 77 + 5f - 82 + 23 + 82 - 2f$

E5) $17p + 36 - 32q - 16 + 12q + 3p$

E6) $150 - 6y - 6y + 267 + 12y - 66 + 150$

E7) $4a - 8b - 6c - 3a + 18b$

b) En las expresiones anteriores, encuentra su valor numérico cuando las letras toman los siguientes valores numéricos:

E1) $s = 24$

E2) $n = 0, m = 5$

E3) $a = 9$

E4) $f = 125$

E5) $p = 85, q = 83$

E6) $y = 4219$

E7) $a = 7, b = 4, c = 1$

E5) $s = 24$

CÓMO COMPARAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. Javier tiene cierto número de cromos, Carmen tiene cinco más que Javier y Carlos el doble que Javier. Si Javier y Carmen juntan sus cromos, ¿tendrán entre los dos más o menos cromos que Carlos? ¿Quién tiene más cromos, Javier, Carmen o Carlos? ¿Y quién tiene menos?

2. Laura tiene 35 € más que Alberto y Clara 20 € menos que Alberto. Van a comprar un regalo. Indica cuánto dinero les queda después de comprar el regalo, en los casos siguientes:

a) El regalo cuesta tres veces el dinero de Alberto.

b) El regalo cuesta 24 €.

c) ¿Podrán pagar el regalo si vale 105 €?

3. Al empezar el colegio en septiembre, María, Adrián y Luisa tienen el mismo dinero en su hucha. Entre septiembre y Navidad gastan o reciben las siguientes cantidades:

María	Adrián	Luisa
Recibe 10 €	Gasta 5 €	Recibe 10 €
Gasta 5 €	Gasta 10 €	Recibe 5 €
Gasta 15 €	Gasta 15 €	Recibe 15 €
No recibe ni gasta nada	Recibe 30 €	Gasta 35 €

a) ¿Quién tiene más dinero? ¿Quién tiene menos? ¿En cuánto se diferencia de los demás el dinero que tiene cada uno?

b) Si al empezar el colegio María tiene el doble que Adrián y éste 30 € menos que Luisa, ¿puede suceder que dos de ellos acaben con la misma cantidad de dinero?

4. Completa las siguientes frases:

Si Adrián tiene 30 € más que Luisa, entonces Luisa tiene 30 € _____ que Adrián.

Si Adrián tiene 30 € menos que Luisa, entonces Luisa tiene 30 € _____ que Adrián.

Si Adrián tiene el doble de euros que Luisa, entonces Luisa tiene _____ de euros que Adrián.

Si Adrián tiene la mitad de euros que Luisa, entonces Luisa tiene _____ de euros que Adrián.

5. Compara las siguientes expresiones, diciendo cuál de ellas es menor o mayor que la otra.

E1) $x + 1$ $x - 10$

E2) $p - 7$ $p - 3$

E3) $2a + 5$ $3a + 12$

E4) $25 - z$ $25 - 2z$

E5) $a - 4b$ $a + b$

E6) $3n + 5$ $2n + 15$

6. Escribe una expresión algebraica que sea mayor y otra que sea menor que cada una de las expresiones que vienen a continuación.

E1) $b - 45$

E2) $r - 27 + 2r - 38 + 17 - r$

E3) $33 - 2a$

7. Escribe una expresión algebraica que sea

E1) 6 unidades mayor que $y - 13$

E2) 11 unidades menor que $2c - 1$

E3) 4 veces mayor que $2n + 3m$

E4) 11 veces mayor que $16 - 3a$

8. Escribe el enunciado de un problema en el que sea necesario comparar las expresiones algebraicas siguientes, indicando el resultado de la comparación:

a) $n - 5$ y $2n - 1$

b) $a + b$ y $a + b + 10$

c) $2x + 8$ y $2x - 8$

CÓMO ENCONTRAR LA DIFERENCIA ENTRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. a) Cuando se calcula mentalmente se procura buscar la forma más sencilla posible de efectuar las operaciones. ¿Cómo haces las siguientes operaciones?

$678 + 99$

$47 + 98$

$157 - 99$

$123 + 39$

$87 - 29$

$601 - 103$

$427 + 397$

$212 - 198$

$117 - 22$

b) Coloca los signos + y – que faltan en las siguientes igualdades:

$$765 - (100 - 1) = 765 - 99 = 765 \text{ ___ } 100 \text{ ___ } 1$$

$$80 - (30 - 1) = 80 - 29 = 80 \text{ ___ } 30 \text{ ___ } 1$$

$$141 - (100 + 2) = 141 - 102 = 141 \text{ ___ } 100 \text{ ___ } 2$$

$$92 - (42 + 3) = 92 - 45 = 92 \text{ ___ } 42 \text{ ___ } 3$$

$$325 + (200 - 3) = 325 + 197 = 325 \text{ ___ } 200 \text{ ___ } 3$$

2. I) Efectúa las operaciones siguientes, teniendo en cuenta que las operaciones entre paréntesis han de hacerse primero.

a) $12 - (8 - 3)$

b) $12 - (8 + 3)$

c) $12 + (8 - 3)$

d) $12 + (8 + 3)$

II) Efectúa las operaciones siguientes:

e) $12 - 8 - 3$

f) $12 - 8 + 3$

g) $12 + 8 - 3$

h) $12 + 8 + 3$

III) Completa la siguiente tabla, colocando al lado de las operaciones del apartado I), las operaciones del apartado II) que tienen el mismo resultado.

Apartado I	Resultado	Apartado II
$12 - (8 - 3)$		
$12 - (8 + 3)$		
$12 + (8 - 3)$		
$12 + (8 + 3)$		

3. Completa las siguientes frases:

Sumar $(a + b)$ es lo mismo que _____ a y _____ b.

Sumar $(a - b)$ es lo mismo que _____ a y _____ b.

Restar $(a + b)$ es lo mismo que _____ a y _____ b.

Restar $(a - b)$ es lo mismo que _____ a y _____ b.

4. a) Carlos tiene 6 canicas más que Javier y Enrique 10 canicas menos que Marcos. Sabiendo que Javier tiene más canicas que Marcos y que Carlos tiene más canicas que Enrique, completa la siguiente tabla:

Nº de canicas de Javier	
Nº de canicas de Carlos	
Nº de canicas de Marcos	
Nº de canicas de Enrique	
Diferencia entre el nº de canicas de Javier y Marcos	
Diferencia entre el nº de canicas de Carlos y Enrique	

b) Si sabemos que la diferencia entre el número de canicas de Javier y el de Marcos es 4, ¿cuál será la diferencia entre el número de canicas de Carlos y el de Enrique?

c) Completa la siguiente tabla:

Diferencia entre el nº de canicas de Javier y Marcos	Diferencia entre el nº de canicas de Carlos y Enrique
7	
20	
	18
	24
d	
	e

5. a) Escribe el signo $>$ ó $<$ entre las siguientes parejas de números

- i) 8 5
- ii) 6 12
- iii) 3 7

b) Simplifica las siguientes expresiones:

i) $n + 8 - 5$

ii) $n + 6 - 12$

iii) $n + 3 - 7$

c) Reescribe las igualdades anteriores cuando n vale 0. ¿Por qué se obtiene en algunos casos un número que resta?

6. a) Expresa la diferencia entre las siguientes expresiones algebraicas y simplifícala todo lo posible:

i) $7p + 3q$ $2p - 2q$

ii) $4t - 6 - 15$ $4t - 3 - 2$

iii) $21 - 2m + 3 - 23 + 5m$ $10m - 30 + 5m + 25$

b) Escribe el signo $>$ ó $<$ entre las siguientes parejas de expresiones algebraicas

i) $7p + 3q$ $2p - 2q$

ii) $4t - 6 - 15$ $4t - 3 - 2$

iii) $21 - 2m + 3 - 23 + 5m$ $10m - 30 + 5m + 25$

7. Escribe expresiones algebraicas siguiendo las instrucciones. Después simplifícalas.

a) Al número 10 réstale $a + 6$

Al número 10 réstale a y súmale 6

A $2x + 5$ réstale $2x - 5$ y al resultado réstale 4

b) A un número cualquiera súmale 7. El resultado réstaselo a 31 y súmaselo a otro número cualquiera.

c) Multiplica un número cualquiera por 3 y réstale 25. El resultado réstaselo al número inicial multiplicado por 9.

d) A 20 réstale un número cualquiera multiplicado por dos. Al resultado que se obtiene, réstale la diferencia entre 30 y el número cualquiera inicial multiplicado por cuatro. A todo eso, súmale 50.

8. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

E1) $a - (a - 8) + b - 8 - (a + 10)$

E2) $17 - (4 - x) + (5 - y) - 15 - 2$

E3) $c + (25 - c + 15) - (25 - c - 15)$

E4) $2m - (7 - 5m) - (7m + 5)$

E5) $20 - 10z - (5z - (10 - 2w))$

9. Cuando las expresiones algebraicas sólo contienen números, las operaciones indicadas en los paréntesis siempre se pueden efectuar. Pero, a veces, es mejor deshacer los paréntesis sin hacer las operaciones, porque así el cálculo resulta más sencillo.

Efectúa los cálculos que se indican en las siguientes expresiones algebraicas, decidiendo en cada caso si es mejor efectuar las operaciones de los paréntesis o deshacerlos sin efectuar esas operaciones.

a) $45 - (371 - 87) + 372 - 87$

Deshacer paréntesis: SÍ NO

b) $8 + 20 - (45 - 44 + 3)$

Deshacer paréntesis: SÍ NO

c) $13 + (27 - 20) - (25 - 10 - 15)$

Deshacer paréntesis: SÍ NO

d) $5 - (4 - (3 - (2 - 1)))$

Deshacer paréntesis: SÍ NO

e) $4578 + 3127 - 578 - (127 + 841 + 512) + 841 + 12$

Deshacer paréntesis: SÍ NO

CÓMO MULTIPLICAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. i) Como ya sabéis, la fórmula del área de un rectángulo es $A = ba$, donde b es la longitud de uno de los lados (base) y a la longitud del otro lado (altura).



Si nos dicen que $a = 3$ cm, ¿cómo expresaremos el área de ese rectángulo?

ii) Si ahora nos dicen que en ese rectángulo el lado b aumenta 2 cm, haz un dibujo del nuevo rectángulo. ¿Cuál será ahora la longitud de sus lados? ¿Cuánto habrá aumentado su área?

2. a) Aplica la propiedad distributiva a las siguientes expresiones para suprimir los paréntesis.

i) $10(a - b)$

ii) $4 + 5(x + 22)$

iii) $12(n + m - 4) - 5n + 40$

b) Aplica la propiedad distributiva en sentido inverso en las siguientes expresiones (esta operación recibe el nombre de “sacar factor común”).

i) $3t - 3v + 3z$

ii) $5v - 10$

iii) $24m + 12n - 12$

3. i) Dibuja un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 4 cm. Si el lado conocido lo aumentamos en 2 cm y el desconocido lo disminuimos en 1 cm obtenemos un nuevo rectángulo. Dibuja este segundo rectángulo. Expresa la longitud de los lados de los dos rectángulos.

ii) ¿Qué pasará con el área del segundo rectángulo?, ¿disminuirá o aumentará respecto al área del primer rectángulo?, ¿cuánto?

iii) ¿Qué longitud tiene que tener el lado desconocido para que los dos rectángulos tengan la misma área?

4. A partir de un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 5 cm, construimos otros dos rectángulos: uno en el que aumentamos el lado conocido en 3 cm y el desconocido lo disminuimos en 3 cm, y otro en que disminuimos el lado conocido en 3 cm y aumentamos el lado desconocido en 3 cm.

a) Haz un dibujo del primer rectángulo.

b) Haz un dibujo del segundo y tercer rectángulos.

c) Encuentra la diferencia entre las áreas de los dos últimos rectángulos. ¿Cuánto tiene que medir el lado desconocido para que las dos áreas sean iguales?

5. i) Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, teniendo en cuenta que la simplificación no siempre exige eliminar los paréntesis:

a) $15 - 4(3x - 5y) + 2(15x - 25y)$

b) $3p + 6 - 3(p - 12 + 2q)$

c) $n(9 + 7m - 6) - m(8 + 7n - 2)$

d) $3(6 - 5(3b - 9 + c) + 10b) + 2(5b - 2c + 65)$

e) $7(5 - a) + 11(5 - a) - 9(5 - a)$

ii) En las expresiones anteriores, encuentra su valor numérico cuando las letras toman los siguientes valores numéricos:

a) $x = 5, y = 3$

b) $p = 28, q = 7$

c) $n = 39, m = 19$

d) $b = 11, c = 11$

e) $a = 2$

6. Completa las siguientes frases:

Sumar $2(a + b)$ es lo mismo que _____ $2a$ y _____ $2b$.

Sumar $2(a - b)$ es lo mismo que _____ $2a$ y _____ $2b$.

Restar $2(a + b)$ es lo mismo que _____ $2a$ y _____ $2b$.

Restar $2(a - b)$ es lo mismo que _____ $2a$ y _____ $2b$.

7. Tres rectángulos tienen un lado igual que mide 2 cm y sus áreas miden 6 cm^2 , $6 + 2a \text{ cm}^2$ y $6 - 4a \text{ cm}^2$.

a) ¿Cuánto mide el otro lado de cada rectángulo?

b) ¿En cuánto se diferencian los lados distintos de los rectángulos?

8. En las siguientes parejas de expresiones algebraicas, indica cuántas veces mayor o menor es una que otra.

a) $36t - 4$ es _____ veces _____ que $18t - 2$

b) $6m + 4n$ es _____ veces _____ que $16(2n + 3m) - 10(2n + 3m)$

c) $30c - 60 + 20b$ es _____ veces _____ que $2b + 3c - 6$

d) $7(456x - 319y)$ es _____ veces _____ que $56(456x - 319y)$

9. Efectúa las siguientes operaciones de la forma más sencilla posible, decidiendo si conviene o no aplicar la propiedad distributiva o sacar factor común:

a) $2(17 - 4 \cdot 3) + 5 - 3^3$

b) $(9^2 - 7^2) - (9 - 7)^2$

c) $47(4 \cdot 15 - 35) - 17 \cdot 25$

d) $45 - 5(20 - 4(15 - 3(10 - 6)))$

e) $8 + 2 \cdot 6 - 5 \cdot 6 + 9 \cdot 6 - 4 \cdot 6$

10. Escribe expresiones algebraicas siguiendo las instrucciones siguientes. Después simplifícalas.

a) A un número cualquiera réstale 25. El resultado multiplícalo por 2 y réstaselo a 100. Al resultado réstale 50.

b) Multiplica un número cualquiera por 3 y súmale 2. El resultado vuelve a multiplicarlo por 2 y réstaselo al número inicial multiplicado por 7.

c) A 10 réstale un número cualquiera multiplicado por 5. Multiplica el resultado por 6. Ahora a 10 súmale el mismo número de antes multiplicado por 6 y el resultado multiplícalo por 5. Resta las dos expresiones obtenidas.

11. Para cada una de las expresiones algebraicas siguientes, propón un problema que la tenga como solución y escríbela lo más simplificada posible.

E1) $3(p - 4) - 5(p + 6)$ en un contexto de áreas de rectángulos.

E2) $20(b + 9) + 10(b + 9)$ en un contexto de butacas de salas de cine.

CÓMO HACER OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

1. Alberto juega varias partidas a los cromos. En la primera partida pierde tres cromos, en la segunda no se acuerda de lo que pasó, en la tercera gana cinco cromos y en la cuarta pierde 4 cromos.

a) ¿Cuántos cromos tenía al finalizar las partidas?

b) ¿Cuántos cromos ganó o perdió en total?

c) Utiliza las expresiones obtenidas en el apartado b) para completar la siguiente tabla:

Nº de cromos que ganó o perdió en la segunda partida	Nº de cromos que ganó o perdió en total
Ganó 1	
Perdió 6	
Gano 5	
Perdió 3	

2. a) Reescribe las siguientes expresiones sin paréntesis:

i) $a + (b + 5)$

ii) $a + (b - 5)$

iii) $a - (b + 5)$

iv) $a - (b - 5)$

b) Reescribe las igualdades del apartado anterior cuando b es igual a 0.

c) Reescribe las siguientes expresiones sin paréntesis:

i) $a + (+ 5)$

ii) $a + (- 5)$

iii) $a - (+ 5)$

iv) $a - (- 5)$

3. Completa las siguientes frases:

Sumar un número que suma es lo mismo que _____ dicho número.

Sumar un número que resta es lo mismo que _____ dicho número.

Restar un número que suma es lo mismo que _____ dicho número.

Restar un número que resta es lo mismo que _____ dicho número.

4. a) Volviendo al problema 1, elige la expresión algebraica en la que se supone que Alberto ganó canicas en la segunda partida. Utilízala para completar la siguiente tabla:

Nº de cromos que ganó o perdió en la segunda partida	Nº de cromos que ganó o perdió en total
+ 1	
- 6	
+ 5	
- 3	

b) ¿Nos permite esa expresión algebraica obtener un resultado correcto aun cuando Alberto pierda canicas en la segunda partida. ¿Por qué?

5. En las siguientes expresiones las letras indican ganancias o pérdidas en partidas de cromos. Encuentra las ganancias o pérdidas totales, sustituyendo las letras por los valores que se indican.

$$E1) p - q + 10 \quad p = +7 \text{ y } q = +3$$

$$E2) 12 - x - y \quad x = -5 \text{ e } y = +8$$

$$E3) 2(6 - a) \quad a = -4$$

$$E4) a - 3(b - 1) \quad a = 2 \text{ e } y = -6$$

$$E5) 3(2 - 3n) - 2(3 - m) \quad n = -5 \text{ y } m = 1.$$

6. a) Dibuja un termómetro con temperaturas por encima y debajo de cero y encuentra la diferencia entre las siguientes temperaturas, contando cuántos grados hay que recorrer para pasar de una temperatura a la otra.

1) 6 sobre cero y 5 bajo cero

2) 7 sobre cero y 2 sobre cero

3) 3 bajo cero y 8 bajo cero

b) Si llamamos T a la temperatura más alta y t a la más baja, escribe la diferencia de temperaturas y utiliza esa expresión para encontrar las diferencias en los casos anteriores. Comprueba si se obtienen con la expresión las mismas diferencias que antes.

7. Efectúa las siguientes operaciones:

$$E1) (-200) + (+300) + (-100) + (-100)$$

$$E2) (+37) - (-40) - (+23) + (-17)$$

$$E3) 8 + 2((-72) - (-12)) - 18$$

$$E4) (4x - 7x) - (2x - 6x) + (5x - 10x)$$

$$E5) ((-5) + (-3) - (-1)) - ((-5) - (-3) + (-1))$$

8. Lee el siguiente texto:

Hasta ahora hemos hablado de números que suman o restan en las expresiones algebraicas, pero aquí vemos que nos sirven para representar temperaturas o pérdidas y ganancias y en algunos problemas se utilizan para dar valores a las letras. También sabemos hacer operaciones con ellos, así que, a partir de ahora vamos a considerarlos números: los NÚMEROS ENTEROS.

Los números enteros son números naturales precedidos de un signo + ó -. A los números naturales precedidos de un signo + se les llama enteros positivos y son equivalentes a los números naturales. A los números naturales precedidos de un signo - se les llama enteros negativos.

Se dice que -2 es el opuesto de +2 y que +2 es el opuesto de -2. Por tanto, también se puede considerar que los números enteros son los números naturales con el añadido de sus opuestos. Más adelante veremos que los números decimales y las fracciones también se pueden ampliar añadiendo sus opuestos y obtendremos los NÚMEROS RACIONALES.

9. a) Desarrolla las siguientes expresiones, aplicando la propiedad distributiva:

i) $(a + 3 \cdot)(b + 5) = a(b + 5) + 3(b + 5) =$

ii) $(a + 3 \cdot)(b - 5) = a(b - 5) + 3(b - 5) =$

iii) $(a - 3 \cdot)(b + 5) =$

iv) $(a - 3 \cdot)(b - 5) =$

b) Reescribe las igualdades del apartado anterior cuando a y b son iguales a 0.

d) Realiza las siguientes multiplicaciones de números enteros.

$(+3)(+5)$

$(+3)(-5)$

$(-3)(+5)$

$(-3)(-5)$

10. Completa las siguientes frases:

Al multiplicar un número positivo por un número positivo se obtiene un número _____

Al multiplicar un número positivo por un número negativo se obtiene un número _____

Al multiplicar un número negativo por un número positivo se obtiene un número _____

Al multiplicar un número negativo por un número negativo se obtiene un número _____

11. Completa las siguientes multiplicaciones, escribiendo el número que falta.

$$(+3)(\quad) = +12$$

$$(-7)(\quad) = +21$$

$$(+5)(\quad) = -15$$

$$(-6)(\quad) = -24$$

12. Realiza las siguientes divisiones de números enteros:

$$(+12) : (+3)$$

$$(+21) : (-7)$$

$$(-15) : (+5)$$

$$(-24) : (-6)$$

CÓMO ORDENAR Y REPRESENTAR NÚMEROS ENTEROS

1. Ya sabemos que si una diferencia es un número positivo significa que el primer término de la diferencia es mayor que el segundo término. En cambio si la diferencia es un número negativo eso quiere decir que el primer término es menor que el segundo. Calcula las siguientes diferencias y utiliza el resultado para decidir cuál de los números es mayor o menor, escribiendo el símbolo $<$ ó $>$ entre ellos.

a) $(+12) - (+8)$	+12	+8
--------------------------	-----	----

b) $(+5) - (-10)$	+5	-10
--------------------------	----	-----

c) $(-6) - (+2)$	-6	+2
-------------------------	----	----

d) $(-15) - (-3)$	-15	-3
--------------------------	-----	----

e) $(-11) - (+11)$	-11	+11
---------------------------	-----	-----

f) $(-2) - (-6)$	-2	-6
-------------------------	----	----

2. a) Ordena de menor a mayor los siguientes números enteros.

+14, -18, +36, +4, -12, -5, -20, +10, +8, 0

b) Ordena de mayor a menor los siguientes números enteros.

7, -7, 1500, -3568, -3569, -83, 1, 13, -100, 5

3. Dibuja un segmento horizontal que abarque casi todo el ancho de la página. Haz una marca en un punto intermedio y debajo de la marca escribe 0. Después, sigue haciendo marcas a la derecha del cero, a la misma distancia unas de otras, y escribe debajo de ellas sucesivamente los números enteros positivos +1, +2, +3, +4, etc. Por último, haz marcas a la izquierda del 0, también a la misma distancia, y escribe debajo de ellas, sucesivamente y a partir del cero, los números enteros negativos -1, -2, -3, -4, etc.

El dibujo así obtenido es una primera representación de la recta numérica que de momento no contiene más que los números enteros que ahora son puntos de la recta. Más adelante te enseñaremos a representar otros números en la recta hasta llenarla. A la longitud del segmento entre dos marcas consecutivas la consideramos la unidad de medida.

4. Completa las siguientes frases:

Si un número entero a es menor que otro número entero b , la representación en la recta real del número a estará situada a _____ de b .

Si un número entero a es mayor que otro número entero b , la representación en la recta real del número a estará situada a _____ de b .

5. a) Dibuja la recta real y utiliza el dibujo para encontrar la longitud de los segmentos de extremos:

-8 y -6; -7 y 9; 6 y 10

b) Dados dos puntos a y b con a menor que b , escribe una expresión algebraica que represente la longitud del segmento cuyos extremos son a y b . Utilízala para calcular esa longitud en los casos anteriores.

6. a) Dibuja la recta numérica y utiliza el dibujo para encontrar la nueva posición después del desplazamiento de una posición inicial, en los casos siguientes:

- i) la posición inicial es -8 y se desplaza 6 unidades hacia la izquierda
- ii) la posición inicial es -7 y se desplaza 9 unidades hacia la derecha
- iii) la posición inicial es 6 y se desplaza 10 unidades hacia la izquierda

b) Dada una posición n que se desplaza m unidades en la recta numérica, escribe una expresión algebraica que represente la nueva posición. Utilízala para encontrar esa posición en los casos anteriores.

7. a) Las propiedades siguientes se cumplen para todos los números naturales. Indica si también se cumplen para todos los números enteros.

- 1) Todo número tiene un “siguiente”.
- 2) Cero significa que “no hay nada”.
- 3) No hay ningún número que sea menor que cero.
- 4) Los sumandos son siempre menores o iguales que el resultado de la suma.
- 5) La suma de números enteros tiene las propiedades asociativa y conmutativa.
- 6) El minuendo de una resta es siempre mayor o igual que el resultado de la resta.
- 7) No se puede restar si el minuendo es menor que el sustraendo.
- 8) La resta es la operación inversa de la suma.

9) Si los factores de un producto son todos distintos de cero, entonces son menores o iguales que el resultado del producto.

10) El producto de números enteros tiene las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva respecto a la suma.

11) El dividendo de una división es siempre mayor o igual que el cociente.

b) ¿Hay alguna propiedad de los números enteros que no la tengan los números naturales?

8. Indica si las siguientes propiedades se cumplen en los números enteros:

1) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$

2) Si $a + c < b + c$, entonces $a < b$

3) Si $a > b$, entonces $ac > bc$

4) Si $ac > bc$, entonces $a > b$

Puedes utilizar tablas de valores para comprobarlo.

CÓMO ENCONTRAR LOS VALORES QUE HACEN QUE UNA RELACIÓN ENTRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS SEA CIERTA

1. a) Coloca el signo $<$ ó $>$ entre las siguientes parejas de expresiones algebraicas, suponiendo que las letras sólo pueden tomar valores positivos.

1) $9 - a$ $6 - a$

2) $4q - 8$ $4q - 5$

3) $2z + 5$ $z + 2$

4) d $-d$

5) $m - 2n$ $3m - n$

b) Coloca de nuevo el signo $<$ ó $>$ entre las parejas de anteriores, suponiendo ahora que las letras sólo pueden tomar valores negativos.

1) $9 - a$ $6 - a$

2) $4q - 8$ $4q - 5$

3) $2z + 5$ $z + 2$

4) d $-d$

5) $m - 2n$ $3m - n$

c) En las desigualdades anteriores, si las letras pueden tomar valores positivos y negativos, ¿a partir de qué números o relaciones entre números cambia el sentido de la desigualdad?

2. Encuentra los valores numéricos que tienen que tener las letras para que las siguientes igualdades sean ciertas:

i) $10y - 20 = 0$

ii) $14 + 7p = 0$

iii) $15x - 45 = 0$

iv) $2500z + 10000 = 0$

3. a) Encuentra la diferencia entre las expresiones algebraicas siguientes y simplifícala todo lo posible:

i) $7t - 5 - 4t + 13$

ii) $9(2x - 8) - 7(2x - 8)$

iii) $5 + 2(6n - 10) - 3 - 6(2n + 3)$

b) Para qué valores de la letra son iguales las dos expresiones algebraicas que aparecen en cada apartado.

c) ¿Para qué valores de las letras es la primera expresión de cada apartado mayor que la segunda?

d) ¿Para qué valores de las letras es la primera expresión de cada apartado menor que la segunda?

4. Encuentra los valores numéricos que tienen que tener las letras para que las siguientes igualdades sean ciertas:

a) $y + 2(y - 2) = 4 - (y - 8)$

b) $28 - n(3n - 10) = 8 + 3n(2 - n)$

c) $10 - 9(2t - 3) = 37 - 18t$

d) $5[5 - (5 - 5p)] = 8p$

e) $8x - 7 = 4(2x - 3)$

5. Encuentra los valores numéricos que tienen que tener las letras para que las siguientes desigualdades sean ciertas:

a) $y + 2(y - 2) > 4 - (y - 8)$

b) $28 - n(3n - 10) < 8 + 3n(2 - n)$

c) $10 - 9(2t - 3) > 37 - 18t$

d) $5[5 - (5 - 5p)] > 8p$

e) $8x - 7 > 4(2x - 3)$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.
<http://www.atd-tad.org/documentos/obstaculos-epistemologicos-en-la-ensenanza-de-los-numeros-negativos-tesis-doctoral/>
- Cid, E. & Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner et al. (eds.), *Difuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, vol. 1, 575-594. IUFM de l'Académie de Montpellier.
<http://www.atd-tad.org/documentos/cid-e-bolea-p-2010-diseno-de-un-modelo-epistemologico-de-referencia-para-introducir-los-numeros-negativos-en-un-entorno-algebraico/>
- Cid, E., Muñoz-Escolano, J.M. & Ruiz-Munzón, N. (2020). Research on negative numbers in school algebra. En M.Bosch et al. (eds.): *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education. A Comprehensive Casebook*, 61-76. London and New York: Routledge.
- Cid, E. y Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En: M. Bosch et al (eds.): *Un panorama de la TAD. An overview of ATD*. Universidad Autónoma de Barcelona, 579-604.
<http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/Documents10.pdf>